チェビシェフ近似はなぜ「最良」か

発展読み物「チェビシェフ多項式」の詳説（大学教養レベル） ｜ **補間誤差公式・monic 最小 sup ノルム・チェビシェフ節点**

本編「チェビシェフ多項式」で、T_n は $[-1,1]$ で ±1 の間を同じ振れ幅で n 回往復し、そのおかげで関数を多項式で近似するとき**区間全体での最大誤差をいちばん小さくできる**、と述べた。その証明は大学の関数近似論の話題だと予告したので、ここできちんと与える。道具立てはたった二つ、**ロルの定理**と T_n **の等振動性（equioscillation）**である。以下、区間は $[-1,1]$、多項式 g の最大値ノルムを $\|g\|_\infty = \max_{-1\le x\le 1}|g(x)|$ と書く。多項式が**モニック**とは最高次の係数が 1 のことをいう。証明中の数値はすべて計算機で照合した[*1]。

1. 補間の設定と誤差公式

$n{+}1$ 個の相異なる点（**節点**）$x_0, x_1, \dots, x_n$ を選び、そこで関数 f の値に一致する n 次以下の多項式 p（**補間多項式**、$p(x_i) = f(x_i)$）を考える。p は節点の上では f に一致するが、その間ではずれる。このずれ $f - p$ の正体が次である。

補間誤差公式

f が $[-1,1]$ で $n{+}1$ 回連続微分可能なら、各 x に対して、x と節点たちを含むある開区間内の点 ξ が存在して

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,W(x), \qquad W(t) := \prod_{i=0}^{n}(t - x_i).$$

W は節点を根にもつ**モニックな** $n{+}1$ **次多項式（節点多項式）**である。

証明（ロルの定理）． x が節点なら両辺 0 で自明。以下 x は節点でないとする。定数 $c := \dfrac{f(x)-p(x)}{W(x)}$（$W(x)\neq 0$）を使って、$t$ **の関数**

$$g(t) := f(t) - p(t) - c\,W(t)$$

を作る。g は $n{+}1$ 回連続微分可能である。まず節点 $t = x_0, \dots, x_n$ で $f(t)-p(t)=0$ かつ $W(t)=0$ だから $g(x_i)=0$。さらに $t = x$ でも $g(x) = \big(f(x)-p(x)\big) - c\,W(x) = 0$。よって g は**相異なる** $n{+}2$ **個の零点** $x_0, \dots, x_n, x$ をもつ。

ここで**ロルの定理**を繰り返す。連続微分可能な関数が相異なる m 個の零点をもてば、その導関数は隣り合う零点の間に少なくとも $m{-}1$ 個の零点をもつ。g（零点 $n{+}2$ 個）に適用すると g' は $n{+}1$ 個、g'' は n 個、…、$g^{(n+1)}$ は**少なくとも 1 個**の零点をもつ。それを ξ とする。いっぽう p は n 次以下なので $p^{(n+1)} \equiv 0$、W はモニックな $n{+}1$ 次なので $W^{(n+1)} \equiv (n+1)!$。したがって

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - c\,(n+1)! \;\Longrightarrow\; c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

[*1] T_n の先頭係数 $= 2^{n-1}$、$\|\widetilde{T}_n\|_\infty = 2^{1-n}$ と等振動、モニック n 次で $\widetilde{T}_n$ が sup ノルム最小、チェビシェフ節点で節点多項式が $2^{-n}T_{n+1}$、補間誤差の上界成立を、いずれも $n \le 8$ で数値検算した。

c の定義に戻せば公式を得る。 ■

この式の読み方

右辺は二つの因子の積である。$f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$ は**関数 f 側**の量で、こちらは近似する相手しだいでコントロールできない。しかし**節点多項式 $W(x)$ は節点の置き方だけで決まる**。だから、区間全体での最大の誤差を小さく抑えたければ、$\|W\|_\infty$ を**できるだけ小さくする節点**を選べばよい。W はモニックな $n{+}1$ 次だから、問題は「モニックな多項式で sup ノルムを最小にするのは何か」に帰着する。それがチェビシェフ多項式である。

2. チェビシェフ多項式のモニック最小性

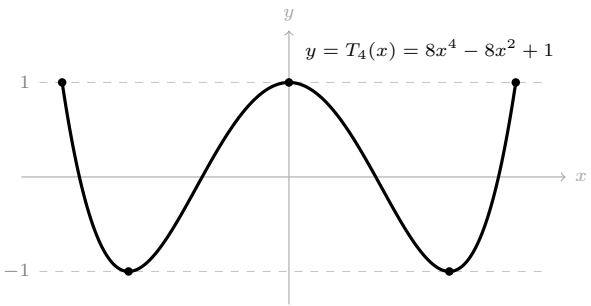
本編のとおり $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ で、漸化式 $T_{n+1}=2xT_n-T_{n-1}$ から T_n の**最高次の係数は 2^{n-1}**（$n\ge 1$）とわかる。そこで

$$\widetilde{T}_n(x) := 2^{1-n}\,T_n(x)$$

とおくと、これは**モニックな n 次多項式**である。$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ は -1 と 1 のあいだを往復し、$x_k=\cos\dfrac{k\pi}{n}$（$k=0,1,\dots,n$）という $n{+}1$ **個の点**で交互に ±1 をとる：$T_n(x_k)=(-1)^k$。したがって

$$\widetilde{T}_n(x_k)=(-1)^k\,2^{1-n},\qquad \|\widetilde{T}_n\|_\infty = 2^{1-n}.$$

この**「最大値と最小値を交互に、しかも等しい振れ幅でとる」性質を等振動（equioscillation）**という。



（図は $n=4$。T_4 は 5 個の点で $+1,-1,+1,-1,+1$ と交互に極値をとる。モニック版 $\widetilde{T}_4=\frac{1}{8}T_4$ はこれを $\frac{1}{8}$ に縮めた同じ形で、$\pm\frac{1}{8}$ を交互にとる。）

モニック最小 sup ノルム定理

モニックな n 次多項式 q の中で、$\|q\|_\infty$ を最小にするのは $\widetilde{T}_n=2^{1-n}T_n$ ただ一つであり、その最小値は

$$\min_{q\ \text{monic},\ \deg q=n}\|q\|_\infty = 2^{1-n}.$$

証明（等振動＋背理法）． $\widetilde{T}_n$ 自身は $\|\widetilde{T}_n\|_\infty=2^{1-n}$ を達成している。これより小さくできないことを示せばよい。あるモニック n 次多項式 q が $\|q\|_\infty<2^{1-n}$ を満たすと仮定して矛盾を導く。差

$$d(x):=\widetilde{T}_n(x)-q(x)$$

を考える。$\widetilde{T}_n$ も q もモニックな n 次だから最高次が打ち消し合い、d **の次数は $n{-}1$ 以下**である。

いっぽう先の $n{+}1$ 個の点 x_k（$k=0,\dots,n$）では $\widetilde{T}_n(x_k)=(-1)^k 2^{1-n}$ で振れ幅ちょうど 2^{1-n}、かたや $|q(x_k)|\le\|q\|_\infty<2^{1-n}$。ゆえに

$$d(x_k)=\underbrace{\widetilde{T}_n(x_k)}_{\pm 2^{1-n}}-\underbrace{q(x_k)}_{|\cdot|<2^{1-n}}\quad\text{の符号は }\widetilde{T}_n(x_k)\text{ と同じ}=(-1)^k.$$

つまり d は $x_0>x_1>\cdots>x_n$ に沿って**符号が n 回入れかわる**。連続だから隣り合う符号違いの間に零点があり、d は**少なくとも n 個の相異なる零点**をもつ。ところが $\deg d\le n-1$。n 個以上の零点をもつ $n{-}1$ 次以下の多項式は恒等的に 0 しかないので $d\equiv 0$、すなわち $q=\widetilde{T}_n$。これは $\|q\|_\infty<2^{1-n}=\|\widetilde{T}_n\|_\infty$ に反する。よってそのような q は存在せず、最小値は 2^{1-n} である。

最後に「ただ一つ」を確かめる。$\|q\|_\infty=2^{1-n}$ ちょうどのモニック q では、$d(x_k)$ は 0 か $(-1)^k$ の符号になり、0 になる点では符号の入れかわりを数えられない。そこで零点を重複度こみで数える。内側の点 x_k（$1\le k\le n-1$）で $d(x_k)=0$ なら、$q(x_k)=\widetilde{T}_n(x_k)=\pm 2^{1-n}$ で、$|q|\le 2^{1-n}$ の q も $\widetilde{T}_n$ もそこで極値をとるから $q'(x_k)=\widetilde{T}_n{}'(x_k)=0$、すなわち d はそこで 2 重以上の零点をもつ。これを使って数え直すと、d の零点は重複度こみでやはり n 個以上あり、$\deg d\le n-1$ から $d\equiv 0$、つまり $q=\widetilde{T}_n$。よって最小値を達成するのは $\widetilde{T}_n$ に限る。 ■

3. 応用：チェビシェフ節点が誤差上界を最小にする

補間誤差公式にもどる。$|f^{(n+1)}|$ の $[-1,1]$ 上の最大値を M_{n+1} と書くと、任意の x で

$$|f(x)-p(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|W(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,\|W\|_\infty.$$

W は**モニックな $n{+}1$ 次**だったから、直前の定理（$n\to n{+}1$）より $\|W\|_\infty\ge 2^{-n}$ で、等号は

$$W=\widetilde{T}_{n+1}=2^{-n}T_{n+1},\qquad\text{すなわち節点を }T_{n+1}\text{ の零点}\quad x_i=\cos\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\ \ (i=0,\dots,n)$$

に選んだときに限って成り立つ。この x_i を**チェビシェフ節点**という。このとき誤差の保証値は

$$\boxed{|f(x)-p(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!\,2^n}}$$

となり、これが**節点の選び方をどう変えても、これ以上は良くできない最良の上界**である。f 側の因子 M_{n+1} には手を出せないが、こちらで自由になる節点多項式の因子を、チェビシェフ節点が最小化してくれる。

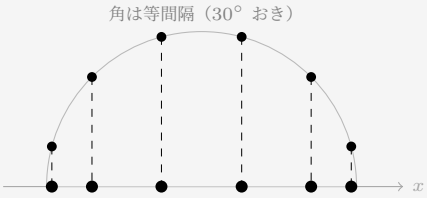
節点の置き方で $\|W\|_\infty$ はどれだけ違うか（$\deg W=n{+}1$）

$\deg W=n{+}1$	チェビシェフ節点 $\|W\|_\infty=2^{-n}$	等間隔節点 $\|W\|_\infty$
3	0.2500	0.3849
5	0.0625	0.1135
7	0.0156	0.0438

等間隔に置くと、節点多項式は**区間の端で大きく暴れて** $\|W\|_\infty$ が大きくなる（次数を上げるほど比は開き、端での補間が悪化する。これが**ルンゲ現象**である）。チェビシェフ節点は逆に**端に密**に置くことで暴れを抑える。

チェビシェフ節点はなぜ端に密なのか

$x_i = \cos\dfrac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}$ は、上半円周上に**等間隔に並べた角**を x 軸へ真下に落とした（射影した）点にほかならない。角が等間隔でも、余弦の射影は端（$x = \pm 1$）ほど詰まる。下図はその様子である（$n{+}1 = 6$ 点）。



射影＝チェビシェフ節点（端ほど密）

4. 背景：一般の最良近似と等振動定理

以上は**チェビシェフの等振動定理**という一般定理の一場面である。区間上の連続関数 f に対し、n 次以下の多項式で最大誤差 $\|f-p\|_\infty$ を最小にする**最良近似** p^* はただ一つ存在し、それは

$f - p^*$ が、最大の振れ幅 $\|f-p^*\|_\infty$ を**符号を交互に変えながら少なくとも** $n{+}2$ **点でとる**

ことで特徴づけられる（等振動）。第 2 節のモニック最小問題は、この定理の $f(x) = x^n$ の場合にあたる。実際、モニック n 次 q は $q(x) = x^n - r(x)$（r は $n{-}1$ 次以下）と書けるので、$\|q\|_\infty = \|x^n - r\|_\infty$ を最小にすることは x^n **を** $n{-}1$ **次以下で最良近似する**ことにほかならない。その誤差 $x^n - r^* = \widetilde{T}_n$ が $n{+}1 = (n{-}1){+}2$ 点で等振動する、というのが第 2 節で使った事実である。整合している。

まとめ：チェビシェフ近似はなぜ最良か

1. **補間誤差公式**（ロルの定理）：$f - p = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}W(x)$。制御できるのは**節点多項式** W。
2. **モニック最小性**（等振動＋背理法）：モニック n 次で $\|\cdot\|_\infty$ 最小は $\widetilde{T}_n = 2^{1-n}T_n$、最小値 2^{1-n}。
3. **チェビシェフ節点**（T_{n+1} の零点）で $\|W\|_\infty = 2^{-n}$ が最小となり、誤差上界 $\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!\,2^n}$ を達成。等間隔のルンゲ現象を避けられる。
4. これらは**等振動定理**の特別な場合。T_n の「行儀のよさ」＝等振動性が、最良性の源である。