チェビシェフ多項式：$\cos n\theta$ は $\cos\theta$ の多項式

発展 中 3 数学・三角関数（加法定理・和積）／数列の漸化式から関数漸化式への“脱線”読み物 ｜ 和積から出る関数漸化式で n 倍角公式が次々に出てくる

2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ と 3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を見ると、どちらも右辺は $\cos\theta$ **だけの多項式**になっている。実は $\cos 4\theta$, $\cos 5\theta$ についても、加法定理を根気よく繰り返せば同じことが起きる。1 倍角から 5 倍角までを並べてみよう。

$$\begin{aligned}
\cos 1\theta &= \cos\theta && \to \quad T_1(x) = x \\
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 && \to \quad T_2(x) = 2x^2 - 1 \\
\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta && \to \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x \\
\cos 4\theta &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 && \to \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
\cos 5\theta &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta && \to \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x
\end{aligned}$$

左の各式には $\cos\theta$ しか登場しない。そこで、その $\cos\theta$ を 1 文字 x に書き直したのが右の式である（ただの書き直しなので、x に $\cos\theta$ を戻せば右の式は左の式に一致する）。この右辺の多項式を**チェビシェフ多項式** $T_n(x)$ と呼ぶ（つまり $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$）。実はこの先も $\cos n\theta$ はつねに $\cos\theta$ の多項式で表せることが知られているのだが、$\cos 6\theta$, $\cos 7\theta, \ldots$ をこの調子で毎回加法定理から導くのは、次数が上がるほど式がふくらんで手に負えなくなる。そこで知りたいのは、$T_n(x)$ を 1 つずつ別々に導くのでなく**効率よく求める方法**である。鍵は**関数漸化式**（数列の漸化式の「数」を「多項式（関数）」に置きかえたもの）にあり、それは三角関数の**和積の公式**から出てくる。応用として、作った T_5 から $\cos 36^\circ$ の値（さらに黄金比）が出ることにも触れる。

1. 和積の公式で $\cos(n+1)\theta$, $\cos n\theta$, $\cos(n-1)\theta$ を結ぶ

まず、$\cos n\theta$ を $\cos(n-1)\theta$ から**加法定理**で表すと

$$\cos n\theta = \cos\big((n-1)\theta + \theta\big) = \cos(n-1)\theta\,\cos\theta - \sin(n-1)\theta\,\sin\theta$$

となるが、右辺に $\sin(n-1)\theta$ が混ざってくる。ここで作りたいのは、$T_n(x)$ を、すでに分かっている $T_{n-1}(x), T_{n-2}(x), \ldots$ という部品だけを使って組み立てる漸化式である。右辺の $\cos(n-1)\theta$ は $T_{n-1}(\cos\theta)$ に置き換えれば手持ちの部品にちょうど収まるが、$\sin(n-1)\theta$ の方はどの $T_k(\cos\theta)$ とも一致しない。T_k はどれも「$\cos(k\theta)$ を表す多項式」として用意した部品であって、$\sin(k\theta)$ を表す部品はまだ無いからである。$\sin(n-1)\theta$ 用にもう 1 組、別の数列を新しく用意して T と並行に漸化式を回すことも考えられなくはないが、それでは手間が二本立てになってしまう。$\cos\theta$ だけで完結する 1 本の漸化式が欲しいので、そもそも sin を持ち込まずに済む組み合わせを探したい。ねらうのは、角度の倍率が 1 ずつちがう $\cos(n+1)\theta$, $\cos n\theta$, $\cos(n-1)\theta$ の 3 つだけを結ぶ式である。そのために、二つの余弦の和を積に直す**和積の公式**

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\,\cos\frac{A-B}{2}$$

を使う。和積の公式は他に $\cos A - \cos B$、$\sin A \pm \sin B$ を積に直す形もあるが、そちらは変形の途中で sin が顔を出す。この $\cos A + \cos B$ の形だけは、A, B をどう取っても左辺の 2 つも右辺の 2 つも

cos のままで、sin が一切混ざらない。cos だけで組み立てたい今回にはちょうど良い道具というわけである。これを、$A=(n{+}1)\theta,\ B=(n{-}1)\theta$ という角度に対して使う。A,B の平均と半差を計算すると

$$\frac{A+B}{2}=\frac{(n{+}1)\theta+(n{-}1)\theta}{2}=n\theta,\qquad \frac{A-B}{2}=\frac{(n{+}1)\theta-(n{-}1)\theta}{2}=\theta$$

だから、和積公式はちょうど

$$\cos(n{+}1)\theta+\cos(n{-}1)\theta=2\cos n\theta\,\cos\theta$$

となる。狙いどおり sin がどこにも現れず、3 つの cos だけを結ぶ式が手に入った。

2. T_n を作る：関数漸化式と数学的帰納法

前節で得た等式をもう一度書いておこう。

$$\cos(n{+}1)\theta+\cos(n{-}1)\theta=2\cos n\theta\,\cos\theta$$

これを、$T_k(\cos\theta)=\cos k\theta$ をみたす多項式 T_k を使って書き直したい。出発点は $T_0(x)=1$（$\cos 0=1$ より）、$T_1(x)=x$（$\cos\theta=\cos\theta$ より）であり、もし T_{n-1},T_n がすでにこの性質をみたす多項式として見つかっているなら、上の式の $\cos(n{-}1)\theta$ を $T_{n-1}(\cos\theta)$ に、$\cos n\theta$ を $T_n(\cos\theta)$ に置き換えて

$$\cos(n{+}1)\theta+T_{n-1}(\cos\theta)=2\,T_n(\cos\theta)\,\cos\theta$$

という式にできる。これを $\cos(n{+}1)\theta$ について解くと

$$\cos(n{+}1)\theta=2\cos\theta\,T_n(\cos\theta)-T_{n-1}(\cos\theta)$$

となり、右辺は T_{n-1},T_n と $\cos\theta$ だけで書けている。そこでこの右辺を使って $T_{n+1}(\cos\theta):=2\cos\theta\,T_n(\cos\theta)-T_{n-1}(\cos\theta)$ と**定義**すれば、$T_{n+1}(\cos\theta)=\cos(n{+}1)\theta$ が自動的に成り立つ。最後に $x=\cos\theta$ とおけば

$$T_{n+1}(x)=2x\,T_n(x)-T_{n-1}(x)$$

という、x だけで書かれた式が得られる。これは**関数漸化式**（数列の漸化式の「数」が「多項式」に変わった 3 項間漸化式）であり、$T_0=1,\ T_1=x$ さえ分かれば、あとは機械的に $T_2,T_3,T_4,\dots$ が全部作れる。

しかも、この作り方自体が「$\cos n\theta$ **はつねに** $\cos\theta$ **の多項式になる**」ことの**証明**になっている。T_{n-1},T_n までが恒等式 $T_k(\cos\theta)=\cos k\theta$ をみたすと分かっていれば、上の漸化式で作った T_{n+1} も自動的にそれをみたす。出発点の T_0,T_1 は確認済みだから、**数学的帰納法**により、0 以上のすべての整数 n で $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ が成り立つ（これは「予想」ではなく、和積の公式と漸化式から導かれる**事実**である）。

n	$T_n(x)$（多項式。$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$）
0	1
1	x
2	$2x^2-1$
3	$4x^3-3x$
4	$8x^4-8x^2+1$
5	$16x^5-20x^3+5x$

たとえば $T_4 = 2x\,T_3 - T_2 = 2x(4x^3-3x)-(2x^2-1) = 8x^4-8x^2+1$。ここで $x=\cos\theta$ に戻せば、これは

$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

という 4 **倍角の公式**にほかならない。4 倍角・5 倍角の公式をわざわざ覚えていなくても、**漸化式を回すだけで各次数の公式が出てくる**わけである。

コラム：和積ひとつで「作り方」まで手に入る

2 倍角・3 倍角の公式は、ふつう $\cos 2\theta, \cos 3\theta$ を**個別に**加法定理を用いていちいち変形して導出する。ところがいま見たように、和積の公式を一度だけ使うと、**すべての倍角の公式を次々に生み出す漸化式**が手に入ってしまう。角度を 1 つずらした cos どうしの和を積に直す、というたった一つの操作が、公式の暗記を「漸化式を回すだけ」に置きかえるのである。

3. 応用：$\cos 36^\circ$ の値と黄金比

漸化式で作った T_n の使い道を一つ見よう。$\theta = 36^\circ$ を選ぶと $5\theta = 180^\circ$ なので、$T_5(\cos 36^\circ) = \cos 180^\circ = -1$。$T_5(x) = 16x^5-20x^3+5x$ だったから、$\cos 36^\circ$ は方程式

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = 0$$

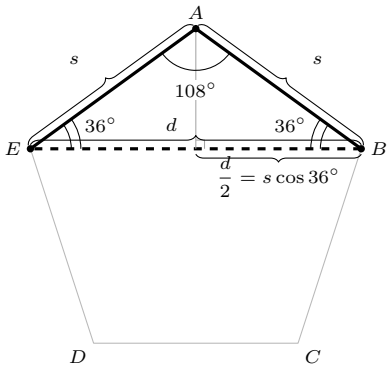
の解。これは**因数分解**できて $(x+1)(4x^2-2x-1)^2 = 0$。$\cos 36^\circ > 0$ だから $x+1=0$ ではなく $4x^2-2x-1=0$。これを解くと $x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ で、やはり $\cos 36^\circ > 0$ より正の解を取って

$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \therefore\quad 2\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

この $2\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$ という比は**黄金比**とよばれ、しばしば記号 φ（ファイ）で表される。すなわち $2\cos 36^\circ = \varphi$ である。三角関数と多項式の計算をたどっただけで、黄金比 φ が $\cos 36^\circ$ の値として現れたことになる。この $\cos 36^\circ$ は、**正五角形**とも直接結びついている。正五角形の 1 つの内角は 108° だから、下図のように、ある頂点 A で交わる 2 辺 AB, AE（長さ s）と、その両端を結ぶ対角線 BE（長さ d）は、頂角 108°・底角 36° の二等辺三角形をつくる。頂点 A から対角線 BE へ垂線を下ろすと、底角 36° の直角三角形ができて $\dfrac{d}{2} = s\cos 36^\circ$、したがって

$$\frac{d}{s} = 2\cos 36^\circ = \varphi.$$

すなわち**対角線と辺の長さの比がちょうど黄金比になる**という正五角形の有名な性質が、$\cos 36^\circ$ の値から説明できるのである。



正五角形。内角 108° の頂点 A に集まる 2 辺（長さ s）と対角線 BE（長さ d）がつくる二等辺三角形。垂線より $\frac{d}{2} = s\cos 36^\circ$、ゆえに $d/s = 2\cos 36^\circ = \varphi$。

コラム：$3\theta = 180^\circ - 2\theta$ を使う近道

$\theta = 36^\circ$ では $3\theta = 108^\circ = 180^\circ - 72^\circ = 180^\circ - 2\theta$ である。ここで補角の余弦 $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ を $\alpha = 2\theta$ に対して使うと、$\cos 3\theta = \cos(180^\circ - 2\theta) = -\cos 2\theta$ が分かる。3 倍角・2 倍角の公式で書くと

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -(2\cos^2\theta - 1),$$

整理すると $4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0$。ここで $x = \cos\theta$ とおけば $4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1) = 0$ となり、5 次を経由せず **3 次**で同じ $4x^2 - 2x - 1 = 0$ に着ける。結果はもちろん同じ $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$。

まとめ：チェビシェフ多項式

1. $\cos n\theta$ は $x = \cos\theta$ の多項式 $T_n(x)$ になる（$T_0 = 1$, $T_1 = x$, $T_2 = 2x^2 - 1, \dots$）。
2. 作り方は**和積**から出る**関数漸化式** $T_{n+1} = 2x\,T_n - T_{n-1}$（数列と三角関数の合流点）。
3. $\theta = 36^\circ$（$5\theta = 180^\circ$）を入れると $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$、$2\cos 36^\circ = \varphi$（黄金比）。