z と $\bar{z}$ が同居する方程式

解説　高2数学・複素数平面

複素数平面の方程式には、z だけでなく共役複素数 $\bar{z}$ や絶対値 $|z|$ を含むものが多く現れます。以下では、こうした方程式を解く手順、その途中で起こりやすい論理の抜け、そして式を平面上の図形として読み取る方法を、例を1つずつ解きながら説明します。

1. 未知数は2つあると数える

$z=x+yi$ と書けば $\bar{z}=x-yi$、$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ なので、$\bar{z}$ も $|z|$ も z から決まる量です。それでも式変形をするときは、z と $\bar{z}$ を**別々の未知数**と見なすと方針が立てやすくなります。未知数を2つと数えた以上、方程式も2本そろえる必要があります。手持ちの式から2本目を作る手段は、次の3つです。

> **z と $\bar{z}$ の両方を含む式から、もう1本の式を作る**
>
> 1. 方程式の両辺の共役複素数をとる（z と $\bar{z}$ の役割が入れ替わった式が得られる）
> 2. $z\bar{z}=|z|^2$ を使い、$\bar{z}$ を z と $|z|$ で書き表す
> 3. 方程式の両辺の絶対値をとる

例1　$(2-i)z+(2+i)\bar{z}=10$ と $|z|=5$ を同時に満たす z を求めます。

2本目の式から $z\bar{z}=25$ で、$z\neq 0$ なので $\bar{z}=\dfrac{25}{z}$ です。これを1本目に入れて両辺に z を掛けると、$\bar{z}$ が消えて

$$(2-i)z^2-10z+25(2+i)=0$$

という z の2次方程式になります。解の公式から

$$\begin{aligned} z&=\frac{5\pm\sqrt{25-25(2-i)(2+i)}}{2-i}\\ &=\frac{5\pm 10i}{2-i},\\ \text{つまり } z&=5i,\ 4-3i \end{aligned}$$

です（$\sqrt{-100}$ は $10i$ とし、分母は $2+i$ を掛けて実数にしました）。

同じ連立方程式を $z=x+yi$ で書き直すと、1本目の左辺は $(2-i)z$ とその共役の和なので $2\,\mathrm{Re}\{(2-i)z\}=2(2x+y)$ となり、1本目は直線 $2x+y=5$、2本目は円 $x^2+y^2=25$ を表します。2つの解は、この直線と円の2つの交点 $(0,5)$、$(4,-3)$ に対応しています。

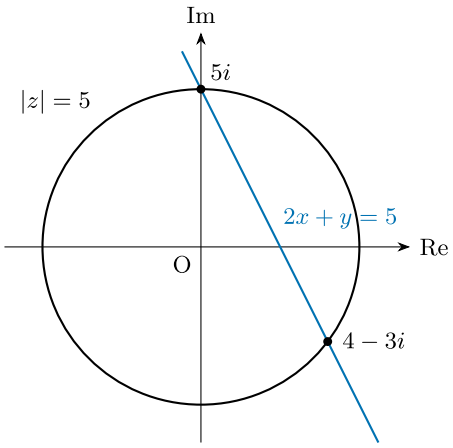


図1　原点中心・半径 5 の円と、直線 $2x + y = 5$。交点は $5i$ と $4 - 3i$

例2　$z^2 = \bar{z}$ を満たす z を求めます。

ここでは3つ目の手段を使います。両辺の絶対値をとると $|z|^2 = |z|$、つまり $|z|(|z| - 1) = 0$ なので、$|z| = 0$ か $|z| = 1$ です。$|z| = 0$ なら $z = 0$ で、これは元の式を満たします。$|z| = 1$ のときは $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$ と書けるので、元の式は $z^2 = \dfrac{1}{z}$、すなわち $z^3 = 1$ になります。逆に $z^3 = 1$ なら $|z|^3 = 1$ から $|z| = 1$ で、$z^2 = \dfrac{1}{z} = \bar{z}$ が成り立ちます。したがって解は

$$z = 0, \quad 1, \quad \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$$

の4つです。

2. 共役をとって引き算したあとの注意

1本の式 ① から共役をとって ② を作り、① と ② を足したり引いたりして z を求める、という操作は頻繁に行います。このとき押さえておくべき事実は次のとおりです。

> 「①かつ②」と「①かつ（①−②）」は同値である。しかし「①かつ②」と「①−②」だけとは、一般に同値でない。

引き算の結果だけを手元に残し、① を捨ててしまうと、条件がゆるくなります。極端な例として「$z = 2$ かつ $\bar{z} = 2$」を考えると、解は $z = 2$ だけです。ところが2式の差 $z - \bar{z} = 0$ は「z が実数」という条件にすぎず、すべての実数がこれを満たします。

例3　c を複素数の定数とし、$z + i\bar{z} = c$ （①）を満たす z を調べます。

① の両辺の共役をとると $\bar{z} - iz = \bar{c}$ で、これに i を掛けると $z + i\bar{z} = i\bar{c}$ となります。左辺が ① と同じなので、① との差をとると z が消えて

$$0 = c - i\bar{c}$$

という定数だけの式が残ります。この式は「① を満たす z があるなら成り立つ」という**必要条件**です。

- $c = 1$ のときは $c - i\bar{c} = 1 - i \neq 0$ なので、① を満たす z はありません。
- $c = 2 + 2i$ のときは $i\bar{c} = i(2 - 2i) = 2 + 2i = c$ で、差の式は $0 = 0$ となり、何の情報も持ちません。この場合は ① に戻る必要があります。$z = x + yi$ を代入すると $z + i\bar{z} = (x + y)(1 + i)$ なので、① は $x + y = 2$ と同じで、解は直線 $x + y = 2$ 上の点全体になります。

授業では、次のような問題を扱いました[1]。

問題

α を $|\alpha| = 1$ を満たす複素数、β を複素数とする。$z - \alpha\bar{z} = \beta$ を満たす複素数 z が存在するための、α, β の条件を求めよ。

この問題も例3と同じ構造をしています。両辺の共役をとると $\bar{z} - \bar{\alpha}z = \bar{\beta}$ で、これに $-\alpha$ を掛けると $\alpha\bar{\alpha} = 1$ により $z - \alpha\bar{z} = -\alpha\bar{\beta}$ となります。左辺が元の式と同じなので、元の式との差から $0 = \beta + \alpha\bar{\beta}$ が出ます。これは必要条件にすぎないので、逆に $\beta + \alpha\bar{\beta} = 0$ のときに元の式を満たす z を1つ示して十分性を確かめます。$z = \dfrac{\beta}{2}$ を代入すると、左辺は $\dfrac{\beta - \alpha\bar{\beta}}{2} = \dfrac{\beta + \beta}{2} = \beta$ となり、元の式を満たします。したがって求める条件は $\beta + \alpha\bar{\beta} = 0$ です。例3は $\alpha = -i$、$\beta = c$ の場合にあたります。

差をとって z が消えたら

残った式は必要条件にすぎない。元の式に戻るか、条件を満たす z を実際に1つ挙げて、十分性を確かめる。2つの式を何倍かして引き、z の値が出た場合も、その値を元の式に代入して確かめる。

3. 絶対値を見たときの3つの読み方

$|w|$ という形の式に出会ったら、次の3通りの扱い方を候補に挙げます。

$|w|$ を見たときの3通りの扱い

1. 2乗して $|w|^2 = w\bar{w}$ と書き、展開して計算する
2. $|z - a|$ を「点 z と点 a の距離」と読み、図形で考える
3. 三角不等式 $|u + v| \leq |u| + |v|$ を使う

例4　$|z+1|=3|z-1|$ を満たす点 z が描く図形を求め、その図形上で $|z|$ の最大値と最小値を求めます。

両辺とも 0 以上なので、2乗しても同値です。1つ目の方法で展開すると

$$\begin{aligned} & z\bar{z}+z+\bar{z}+1=9\left(z\bar{z}-z-\bar{z}+1\right) \\ \iff\quad & z\bar{z}-\frac{5}{4}(z+\bar{z})+1=0 \\ \iff\quad & \left|z-\frac{5}{4}\right|^2=\frac{9}{16} \end{aligned}$$

となるので、z は中心 $\dfrac{5}{4}$、半径 $\dfrac{3}{4}$ の円周上を動きます。2点 -1、1 からの距離の比が $3:1$ で一定の点の集まりなので、これはアポロニウスの円です。

$|z|$ は原点 O と点 z の距離です（2つ目の読み方）。O は円の中心から $\dfrac{5}{4}$ 離れていて、半径 $\dfrac{3}{4}$ より遠いので円の外にあります。O と中心を通る直線が円と交わる2点で距離は最大・最小になり、最大値は $\dfrac{5}{4}+\dfrac{3}{4}=2$ $(z=2)$、最小値は $\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$ $\left(z=\dfrac{1}{2}\right)$ です。最大値は3つ目の読み方でも確かめられ、$|z|\le\left|z-\dfrac{5}{4}\right|+\dfrac{5}{4}=2$ となります。

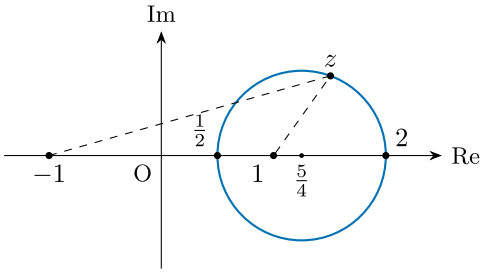


図2　中心 $\frac{5}{4}$・半径 $\frac{3}{4}$ の円。円上の点 z から点 -1 と点 1 までの距離の比は $3:1$。円と実軸の交点は $\frac{1}{2}$ と 2

4. 複素数平面の直線の方程式

平面上の直線は、次の4通りの情報のどれかで決まります。

直線を決める情報

1. 通る1点と、直線の向き（方向ベクトル）
2. 通る2点
3. 通る1点と、直線に垂直な向き（法線ベクトル）
4. 2点から等距離にあること（垂直二等分線）

それぞれを z と $\bar{z}$ の式に直します。どの場合も直線上を動く点を $\mathrm{P}(z)$ とします。

4-1. 通る1点と方向ベクトル

点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を通り、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$（$\mathrm{B}(\beta)$、$\beta \neq 0$）と平行な直線を考えます。

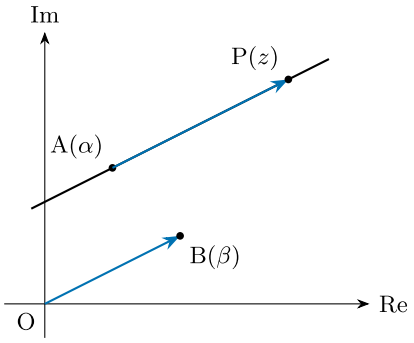


図3　点 A を通り、原点から B へのベクトルと平行な直線。A から P へのベクトルも同じ向き

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と平行（または $\mathrm{P}=\mathrm{A}$）であることは、$z-\alpha$ が β の実数倍であること、つまり比 $\dfrac{z-\alpha}{\beta}$ が実数であることと同じです。実数とは共役をとっても変わらない数なので、

$$\begin{aligned}\frac{z-\alpha}{\beta} \in \mathbb{R} &\iff \frac{z-\alpha}{\beta} = \frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \\ &\iff \bar{\beta}z - \beta\bar{z} - \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 0\end{aligned}$$

となります（2行目は両辺に $\beta\bar{\beta}$ を掛けて移項しました）。$\bar{\beta}z$ と $\beta\bar{z}$ は互いに共役な2数で、それを**引いて**います。定数項 $-\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta$ も、$\bar{\alpha}\beta$ からその共役を引いた形なので、純虚数か 0 です。

4-2. 通る2点

異なる2点 z_1、z_2 を通る直線は、「点 z_1 を通り、方向ベクトルが z_2-z_1」の直線なので、4-1 で $\alpha=z_1$、$\beta=z_2-z_1$ とすれば得られます。

4-3. 通る1点と法線ベクトル

点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を通り、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$（$\beta \neq 0$）に垂直な直線を考えます。

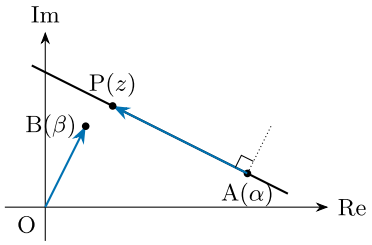


図4　点 A を通り、原点から B へのベクトルに垂直な直線

今度は $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\pm\dfrac{\pi}{2}$ 回した向きなので、比 $\dfrac{z-\alpha}{\beta}$ は純虚数（$\mathrm{P}=\mathrm{A}$ なら 0）です。純虚数または 0 とは、共役をとると符号が反転する数、つまり共役との和が 0 になる数なので、

$$\frac{z-\alpha}{\beta}+\frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}=0$$
$$\iff \bar{\beta}z+\beta\bar{z}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta=0$$

です。こちらは $\bar{\beta}z$ と $\beta\bar{z}$ を**足して**おり、定数項 $-(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta)$ は共役な2数の和なので実数です。

4-4. 垂直二等分線

異なる2点 $\mathrm{A}(\alpha)$、$\mathrm{B}(\beta)$ から等距離にある点の集まりが、線分 AB の垂直二等分線です。

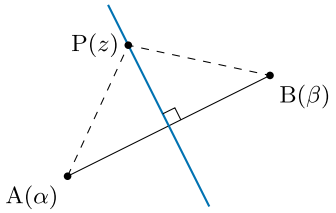


図5　線分 AB の垂直二等分線上の点 P は、A と B から等距離

距離は 0 以上なので2乗しても同値で、

$$|z-\alpha|=|z-\beta| \iff (z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})=(z-\beta)(\bar{z}-\bar{\beta})$$
$$\iff (\bar{\beta}-\bar{\alpha})z+(\beta-\alpha)\bar{z}+|\alpha|^2-|\beta|^2=0$$

となります（展開すると両辺の $z\bar{z}$ が打ち消し合います）。z と $\bar{z}$ の係数は互いに共役で、定数項は実数です。4-3 と同じ形で、$A=\beta-\alpha$ と見れば一致します。

まとめ

4つの導出で出てきた式は、すべて次の2つの型のどちらかです。

> **直線を表す $z,\ \bar{z}$ の1次式（2つの型）**
>
> $A\neq 0$ として、
>
> 1. $\bar{A}z-A\bar{z}+B=0$　（B は**純虚数**または 0）
> 2. $\bar{A}z+A\bar{z}+B=0$　（B は**実数**）

$A\neq 0$ の条件は、4-1・4-3 の $\beta\neq 0$、4-4 の $\alpha\neq\beta$ にあたります。$A=0$ だと z が式から消え、直線を表しません。この形の式を見て直線だと分かること、必要なら上の導出を自分で再現できることの2つが目標です。

2の型は、$|z|^2$ を補うと平方の形にまとめられることがあります。$\bar{A}z+A\bar{z}$ に $z\bar{z}+A\bar{A}$ を足すと $(z+A)(\bar{z}+\bar{A})=|z+A|^2$ になるからです。

> **$\bar{A}z+A\bar{z}$ の形を見たら**

> $|z|^2$ を補って、$|z+A|^2$ の形を作れないか試す

たとえば $(1-2i)z+(1+2i)\bar{z}+5=0$ は $A=1+2i$ の2の型で、定数項 5 が $|A|^2$ に等しくなっています。両辺に $z\bar{z}$ を足すと $|z+(1+2i)|^2=|z|^2$、つまり $|z-(-1-2i)|=|z-0|$ となり、原点と点 $-1-2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線だと分かります。この直線は中点 $-\dfrac{1+2i}{2}$ を通ります。§2 の問題でも同じ形が現れます。$\beta\neq 0$ のとき、条件 $\beta+\alpha\bar{\beta}=0$ は $\alpha=-\dfrac{\beta}{\bar{\beta}}$ と書けます。これを $z-\alpha\bar{z}=\beta$ に代入して $\bar{\beta}$ を掛けると $\bar{\beta}z+\beta\bar{z}-|\beta|^2=0$ となり、両辺に -1 を掛ければ $A=-\beta$、定数項 $|A|^2$ の2の型です。両辺に $z\bar{z}$ を足すと $|z-\beta|^2=|z|^2$ となるので、この式は原点と点 β の垂直二等分線を表します。この直線が中点 $\dfrac{\beta}{2}$ を通ることから、解 $z=\dfrac{\beta}{2}$ が見つかります。

5. 絶対値が 1 の複素数

単位円周上の点 z については、次の言い換えが基本になります。

> **$|z|=1$ の言い換え**
>
> $$|z|=1 \iff z\bar{z}=1 \iff \bar{z}=\frac{1}{z}$$

$\bar{z}$ を $\dfrac{1}{z}$ に置き換えると、式に残るのは z だけになります。

> **例5**　$|z|=1$、$z\neq\pm i$ のとき、$w=\dfrac{z}{1+z^2}$ が実数であることを示します。
>
> $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$ を使うと
>
> $$\bar{w}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}=\frac{\dfrac{1}{z}}{1+\dfrac{1}{z^2}}=\frac{z}{z^2+1}=w$$
>
> なので、w は共役をとっても変わらず、実数です。極形式 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ を使っても示せます。分母分子を z で割ると $w=\dfrac{1}{\frac{1}{z}+z}=\dfrac{1}{\bar{z}+z}=\dfrac{1}{2\cos\theta}$ で、$z\neq\pm i$ より $\cos\theta\neq 0$ です。

例5のように、絶対値が 1 と分かっている複素数には3通りの表し方があり、問題に合わせて選びます。極形式が使いやすいのは、絶対値がすでに 1 と分かっていて、残る未知の情報が偏角 θ だけになるからです。

> **絶対値 1 の複素数の表し方**

1. z のまま：$\bar{z} = \dfrac{1}{z}$ を使う
2. 極形式：$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく
3. 直交形式：$z = x + yi$、$x^2 + y^2 = 1$ とおく

極形式は積と商の計算には向いていますが、和の計算には向きません。絶対値の等しい2数の和なら、和積の公式で

$$(\cos a + i\sin a) + (\cos b + i\sin b) = 2\cos\frac{a-b}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2} + i\sin\frac{a+b}{2}\right)$$

と「実数×（絶対値 1 の複素数）」の形にまとまります。一方 $(\cos a + i\sin a) + r(\cos b + i\sin b)$（$r \neq 1$）のように絶対値が違うと、この公式は使えず、偏角の見える形にはまとまりません。

上の和積の式で $a = \theta$、$b = 0$ とした場合は、とくによく使われます。

1±（絶対値 1 の複素数）

$$\begin{aligned} 1 + (\cos\theta + i\sin\theta) &= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ 1 - (\cos\theta + i\sin\theta) &= 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= -2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

計算としては、実部に $1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$、$1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ を、虚部に $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ を使っただけです。この結果は図でも説明できます。

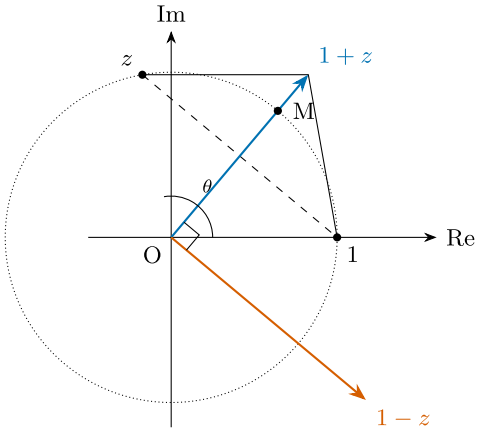


図6　0, 1, $1+z$, z を頂点とするひし形。対角線 $1+z$ は偏角 $\frac{\theta}{2}$ の向き、もう1本の対角線 $1-z$ はそれに垂直

$z=\cos\theta+i\sin\theta$（$0<\theta<2\pi$）とし、単位円周上で偏角 $\dfrac{\theta}{2}$ の点を M とします。M が表す複素数は $\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}$ です。4点 0、1、$1+z$、z は、辺の長さがすべて 1 のひし形の頂点で、$1+z$ と $1-z$ はその2本の対角線にあたります（$1-z$ は点 z から点 1 へ向かう対角線）。

- ひし形の対角線は頂角を2等分するので、$1+z$ は角 θ を2等分する方向、つまり M の方向（$\pi<\theta<2\pi$ なら逆向き）を向きます。長さは $2\cos\dfrac{\theta}{2}$ の絶対値です。
- ひし形の2本の対角線は直交するので、$1-z$ は M の方向を $-\dfrac{\pi}{2}$ 回した向きを向きます。長さは、中心角 θ の弦の長さ $2\sin\dfrac{\theta}{2}$ です。$-\dfrac{\pi}{2}$ の回転は $-i$ を掛けることなので、$1-z=-i\cdot 2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$ となり、上の式と一致します。

1　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。
