e^x で割ってから微分

発展　高2数学・微分

授業では、e^x を多項式で近似した式に e^{-x} を掛けた関数を微分して上下から評価し、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$ [1] を導く問題を扱いました [2]。続けて分子を $2+4+\cdots+2n=n(n+1)=2n+n(n-1)$ と組み替え、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+4+\cdots+2n}{n!}=3e$ も求めました。この補遺では、その中で使った道具を3つ取り出して、それぞれ単独で使える形に整理します。

1. 引き算でなく割り算で比べる

以下、$n=0,1,2,\dots$ に対して

$$S_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

とおきます。目標は「$x>0$ のとき $e^x>S_n(x)$」を示すことです。

差を微分すると何が起きるか

$S_n(x)$ を微分すると、$\dfrac{x^k}{k!}$ は $\dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ に変わり、定数項 1 は消えます。各項が1つ手前の項にずれるので、

$$S_n'(x)=S_{n-1}(x)$$

です（$S_0'(x)=0$）。そのため差 $e^x-S_n(x)$ を微分すると $e^x-S_{n-1}(x)$ となり、形は同じで添字が1つ減っただけです。符号が分かるのは $e^x-S_0(x)=e^x-1$ まで下りたときなので、この方針では微分と「$x=0$ で 0」の確認を n 段くり返すことになり、答案としては数学的帰納法で書くのが筋になります。

比を微分すると何が起きるか

そこで、差ではなく比 $\dfrac{S_n(x)}{e^x}$ を調べます。

$$g_n(x)=e^{-x}S_n(x)$$

とおいて積の微分をすると

$$
\begin{aligned}
g_n'(x) &= e^{-x}\big(S_n'(x) - S_n(x)\big) \\
&= e^{-x}\big(S_{n-1}(x) - S_n(x)\big) \\
&= -e^{-x}\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

となります。S_{n-1} と S_n は最後の項 $\dfrac{x^n}{n!}$ しか違わないので、引き算でほとんどが打ち消し合い、単項式が1つだけ残るわけです。

$x > 0$ では $g_n'(x) < 0$ です。g_n は $x \geqq 0$ で連続なので $x \geqq 0$ で狭義単調減少となり、$x > 0$ で

$$
g_n(x) < g_n(0) = 1
$$

が成り立ちます[3]。両辺に e^x (> 0) を掛ければ $e^x > S_n(x)$ です。

> **なぜ割ると1回で済むのか**
>
> 多項式 $p(x)$ に対して $\big(e^{-x}p(x)\big)' = e^{-x}\big(p'(x) - p(x)\big)$ です。e^x が微分しても形を変えない関数であるため、e^x で割った式の微分には「$p' - p$」という引き算が現れます。$p = S_n$ のときは、上で見たとおり S_n' が S_n とほとんど同じ多項式なので、この引き算で式がほぼ消えます。e^x と e^x の近似式を比べる場面で割り算が都合よいのは、このためです。

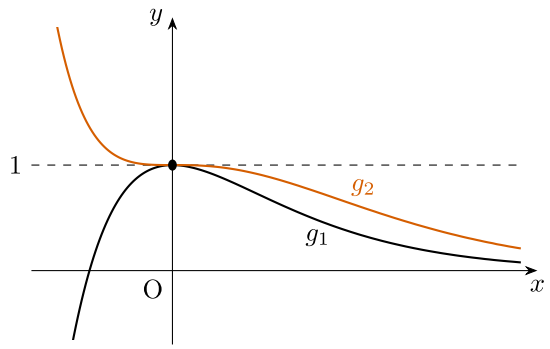
> **e^x の不等式証明**
>
> e^x と多項式を比べるときは、差をとる前に両辺を e^x で割った形を考える。微分が1回で済むことがある

$x < 0$ ではどうなるか

同じ $g_n'(x) = -e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}$ から、$x < 0$ での大小も読み取れます。ここでは x^n の符号が n の偶奇で変わる点に注意します。

- n が偶数のとき：$x^n \geqq 0$ なので $g_n'(x) \leqq 0$ で、等号は $x = 0$ だけです。導関数が 0 になるのが1点だけなら、g_n は実数全体で狭義単調減少です。したがって $x < 0$ では $g_n(x) > g_n(0) = 1$、つまり $e^x < S_n(x)$ となり、$x > 0$ のときと**大小が逆**になります。
- n が奇数のとき：$x < 0$ では $x^n < 0$ なので $g_n'(x) > 0$ で、g_n は $x \leqq 0$ で増加します。よって $x < 0$ でも $g_n(x) < 1$、つまり $e^x > S_n(x)$ です。

下の図は $n = 1$（黒）と $n = 2$（朱）の $y = g_n(x)$ です。どちらも点 $(0, 1)$ を通りますが、g_1 は $x = 0$ で最大値 1 をとる山形、g_2 は減少し続ける曲線で、$x = 0$ で接線が水平になるだけです。たとえば $x = -1$ では $e^{-1} \fallingdotseq 0.368$ に対して $S_2(-1) = \dfrac{1}{2}$ なので、確かに $e^x < S_2(x)$ になっています。



2. マクローリン展開

S_n はどういう多項式か

$S_n(x)$ の各項の係数は、次の性質から決まっています。

> $x=0$ での値と、1 階から n 階までの微分係数が、すべて e^x と一致する n 次多項式

実際、多項式 $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ を k 回微分して $x=0$ を代入すると、x^k の項だけが生き残って $k!\,c_k$ になります。これを e^x の k 階微分係数 1 に合わせると $c_k=\dfrac{1}{k!}$ で、S_n の係数がちょうど得られます。

同じことを一般の関数 $f(x)$ で行うと、$x=0$ で n 階まで f と一致する多項式は

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

です。次数 n を限りなく大きくしたものを考えるのが、マクローリン展開です。$x=0$ の代わりに $x=\alpha$ で合わせる場合は x^k を $(x-\alpha)^k$ に替え、これをテイラー展開と呼びます（マクローリン展開は $\alpha=0$ のテイラー展開です）。

テイラー展開・マクローリン展開

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k\\&=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)\\&\quad+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots\end{aligned}$$

$\alpha=0$ の場合を**マクローリン展開**という。

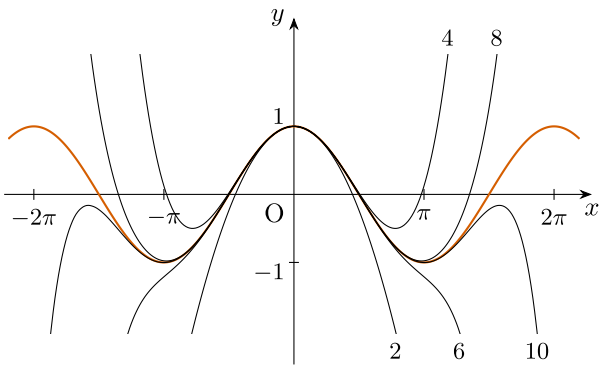
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

右辺を $(x-\alpha)$ の1次の項までで打ち切った $f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)$ は、$x=\alpha$ での接線の式そのものです。打ち切る次数を上げるほど、$x=\alpha$ の近くで曲線によりよく沿う多項式が得られます。

とはいえ、枠の等式がいつも正しいとは限りません。等号で結んでよいのは、右辺の級数が収束して、その和が $f(x)$ に一致する範囲に限られます。何回でも微分できるのに、マクローリン展開がもとの関数と一致しない関数もあります[4]。剰余項（打ち切ったときの誤差）を式で表す形は、平均値の定理のまわり で扱っています。

図で見る：$\cos x$ の場合

$\cos x$ は微分するたびに $-\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x$ と巡るので、$x=0$ での微分係数は $1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots$ です。したがってマクローリン展開には偶数次の項だけが並び、符号が交互に変わります。下の図は $y=\cos x$（朱）と、その展開を $2, 4, 6, 8, 10$ 次で打ち切った多項式（黒、数字が次数）です。



どの多項式も $x=0$ の近くでは $\cos x$ に重なり、次数を上げるほど重なる範囲が外へ広がっていきます。一方、どの次数で打ち切っても、$|x|$ が大きい所では多項式は $\pm\infty$ に飛んでいきます。$\cos x$ の展開がすべての実数 x で成り立つというのは、x を1つ固定して次数を上げていけば値が $\cos x$ に近づく、という意味です。

よく使う展開

覚えておきたい展開

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots \\
\operatorname{Arctan} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}
$$

$\operatorname{Arctan} x$ は $\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表します。等号で結べる x の範囲は式ごとに違います。x にどんな実数を入れてもよいのは e^x、$\cos x$、$\sin x$、$\cosh x$、$\sinh x$ の5つです。残りは範囲が限られ、$\dfrac{1}{1-x}$ と $\dfrac{1}{1+x^2}$ は $-1 < x < 1$、$\log(1+x)$ は $-1 < x \leqq 1$、$\operatorname{Arctan} x$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ のときに限ります。たとえば $\dfrac{1}{1-x}$ の式に $x = 2$ を入れると、左辺は -1 なのに右辺の和は限りなく大きくなります。

授業で扱った問題との関係も、この一覧から読み取れます。$x > 0$ での不等式 $x > \log(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$ は、$\log(1+x)$ の展開を1次で打ち切った式と2次で打ち切った式で、$\log(1+x)$ を上下から挟んだものです。また $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ は、e^x の展開に $x = 1$ を代入した式にあたります。§1 の結果 $S_n(1) < e$ は、その部分和がつねに e より小さいことを言っています。

3. 分子を組み替えて $\displaystyle\sum \frac{p(n)}{n!}$ を求める

鍵になる約分

k を正の整数とし、n から始めて 1 ずつ減らしながら k 個掛けた積 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ を考えます。$n \geqq k$ なら

$$
\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \frac{1}{(n-k)!}
$$

と約分できます。$0 \leqq n < k$ のときは積の中に 0 が入るので、この項は 0 です。したがって $N \geqq k$ として

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{m=0}^{N-k} \frac{1}{m!} \xrightarrow{N\to\infty} e$$

となります（$m = n-k$ と置き直しました）。$k=0$ の「積」は 1 と約束すれば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$ もこの形に含まれます。

ここから次のことが分かります。分子の多項式 $p(n)$ を

$$p(n) = c_0 + c_1\,n + c_2\,n(n-1) + c_3\,n(n-1)(n-2) + \cdots$$

の形に書き直せれば、和は有限個の「e に収束する和」の定数倍の和になり、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(n)}{n!} = (c_0 + c_1 + c_2 + \cdots)\,e$$

です。冒頭の和で分子が $2+4+\cdots+2n$ だったことには特別な意味はなく、効率よく答えにたどり着けたのは、$n(n+1) = 2n + n(n-1)$ と組み替えたことによります。係数の和 $2+1$ から $3e$ が出ます（$n=0$ の項は 0 なので、和を $n=1$ から始めても値は同じです）。

係数は小さい n を代入して決める

係数 $c_0, c_1, \ldots$ を求めるには、$n = 0, 1, 2, \ldots$ を順に代入するのが手早い方法です。$n = j$ を代入すると、c_{j+1} 以降の項は積に 0 を含んで消えるので、未知数が1つずつ増える連立方程式を上から順に解けば済みます。

例として n^3 を書き直してみます。

$$n^3 = c_0 + c_1 n + c_2 n(n-1) + c_3 n(n-1)(n-2)$$

とおいて $n = 0, 1, 2, 3$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
&n=0:\ 0 = c_0 \\
&n=1:\ 1 = c_0 + c_1 \text{ より } c_1 = 1 \\
&n=2:\ 8 = c_0 + 2c_1 + 2c_2 \text{ より } c_2 = 3 \\
&n=3:\ 27 = c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3 \text{ より } c_3 = 1
\end{aligned}$$

と、上から順に決まります。

両辺はどちらも n の3次以下の多項式で、$n=0,1,2,3$ の4つの値で一致しています。3次以下の多項式は4点の値で決まるので、両辺は多項式として等しく、

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$$

が成り立ちます。係数の和は $1+3+1=5$ なので

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e$$

です。

練習

次の和を求めてみましょう。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n+2}{n!}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$

答え合わせ用（自分で求めてから開く）

(1) $n^2 = n(n-1) + n$ より $2e$。

(2) $n^2+3n+2 = n(n-1) + 4n + 2$ より $(1+4+2)e = 7e$。

(3) $n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n$ より $(1+6+7+1)e = 15e$。

同じ方法で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!} = 52e$ も出ます[5]。

1　$n!$ は 1 から n までの積で、$0! = 1$ と約束する。

2　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。

3　冒頭の問題で e^{-x} を掛けた関数が 1 より小さいことを示した部分は、この $g_n(x) < 1$ にあたります。

4　$f(x) = e^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$、$f(0) = 0$ がその例です。この関数は $x=0$ での微分係数がどの階でも 0 なので、マクローリン展開の右辺は恒等的に 0 になりますが、$f(1) = \dfrac{1}{e} \neq 0$ です。

5　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$ を e で割った値は $k=1,2,3,4,5$ で $1,2,5,15,52$ となります。この数の並びはベル数と呼ばれ、k 個のものをいくつかの組に分ける方法の総数に一致します。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。