因数分解の手順について

授業では，以下のポイントを扱いました：

【Point】〈因数分解の手順〉

①共通因数でくくる，カタマリはないか見る．

②因数分解公式を使えないか考える．

③

a) **最低次の文字について整理する**

→その文字についての係数をできるだけ因数分解し，その文字についての式とみて

- 共通因数でくくる
- 因数分解公式を使えないか考える

をやる

b) 項を適当に組み合わせる

→平方の差　or　共通因数のくくり出し

をやる

①，②で対応できないものについては，最低次の文字についてその式の次数が２次以下の時には③の a) が有効で，さらに１次の時には最強であることを授業では喋りました．ここではなぜ最低次の文字について式を整理すればうまくいきやすいのかということについて説明してみます

最低次の文字についてその式の次数が１次の時について

わかりやすいように x,y,z の３文字の式の因数分解を考えるものとし，またその式が x について一次であるとしますが，同様の議論は１，２，４，５，６・・・文字の式でも可能ですし，もちろん最低次の文字が x でない時にも同じように議論できます．ある x,y,z の式 $P(x,y,z)$ が与えられ，その式の x についての次数は１であるとし，また因数分解可能であるとします．ただし，$P(x,y,z)$ というのは，x,y,z だけの式という意味です．これを x について整理すると，$P(x,y,z)$ の x についての次数は１なので，とある y,z だけの式 $Q(y,z)$，$R(y,z)$ を用いて，

$$P(x,y,z)=Q(y,z)\cdot x+R(y,z)$$

のように表せます．今，$P(x,y,z)$ は因数分解可能なので，これが因数分解されるなら $Q(y,z)$ と $R(y,z)$ は共通因数を必ず持っている必要があります．このため，『x についての係数』である $Q(y,z)$ と $R(y,z)$ をできる限り因数分解して行けば，その因数たちの中に必ず $Q(y,z)$ と $R(y,z)$ の共通因数があることになり，これでくくることで一回因数分解できますから，最低次の文字について整理すると簡単に因数分解できることがわかりますね！ しかも，共通因数をできる限りくくり出してしまえば，残った x の１次式の係数どうしにはもう共通因数がないので，これ以上は因数分解できません（もし割れたら，x を含まない因数が出てきて，それが係数の共通因数になってしまうからです）．あとはくくり出した y,z だけの式を因数分解すれば終わりなので，１次の時には「最低次の文字について整理する」が最強なのです．

最低次の文字についてその式の次数が２次の時について

議論はほとんどおんなじです．ある x,y,z の式 $P(x,y,z)$ が与えられ，その式の x についての次数は２であるとし，また因数分解可能であるとします．これを x について整理すると，$P(x,y,z)$ の x についての次数は２なので，とある y,z だけの式 $Q(y,z)$，$R(y,z)$，$S(y,z)$ を用いて，

$$P(x,y,z)=Q(y,z)\cdot x^2+R(y,z)\cdot x+S(y,z)$$

のように表せます．今，$P(x,y,z)$ は因数分解可能なので，この式は x の２次式として因数分解可能であるか，あるいは $Q(y,z)$ と $R(y,z)$ と $S(y,z)$ が共通因数を必ず持っているはずです．後者の場合には『最低次の文字についてその式の次数が１次の時について』で述べたものとまったく同じようにして，前者の場合にはたすきがけをもちいた因数分解をしてやることで，$P(x,y,z)$ を因数分解することができます．たすきがけにおいては特に２次係数と定数項に当たる $Q(y,z)$ と $S(y,z)$ がどういう因数を持っているのかについてそれぞれの式をできる限り因数分解して調べることで，整数係数の２次式のたすきがけとまったく同じように因数分解することができます．（整数係数の２次式の各係数の『素因数』が，今の $Q(y,z)$，$R(y,z)$，$S(y,z)$ の因数分解した後のそれぞれの『因数』と対応していると考えるとわかりやすいでしょう．）

ちなみに，３次以上の整式の因数分解には『因数定理』や『n 次方程式の有理数解の候補についての定理』, また『三次式の因数分解公式』（このあと授業で扱います）を用います．