重なった根は、消えていなかった

「因数定理の拡張」は、なぜ微分の単元にあるのか

授業の例題では、$f(x)$ を $(x-a)^2$ で割った余り $px+q$ を、$x=a$ の代入だけでは求められず、微分してからもう一度 $x=a$ を代入した。$(x-a)^2=0$ の根は、重なってはいても $x=a$ と $x=a$ の 2 つある。根が 2 つなら条件も 2 本出てよいはずなのに、代入で見えるのは 1 本だけだった。**もう 1 本はどこへ消えたのか。**

1. 根を離しておけば、2 本ともちゃんとある

根を少しずらして、$(x-a)(x-b)$（$a \neq b$）で割ってみる。$f(x)=(x-a)(x-b)g(x)+px+q$ に $x=a,\, b$ を代入すると商の項が消え、$f(a)=pa+q$ と $f(b)=pb+q$ の 2 本が出る。重根は、この b を a に近づけた行き着く先である。

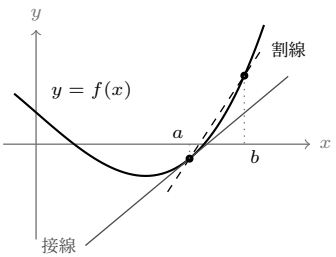
2. くっつく瞬間、2 本目の条件は 0 に潰れる

$b=a$ をいきなり代入すると、2 本の式はどちらも $f(a)=pa+q$ になる。2 本の**差**をとれば $f(b)-f(a)=p(b-a)$ で、$b=a$ では両辺とも 0 になり、$0=0$ という何も言わない式になる。2 本目の条件は、消えたのではなく 0 **に潰されて見えなくなっていた**のである。

では、潰れきる直前に両辺を $b-a$ で割っておく。

$$p=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

分子も分母も 0 に向かうが、その比は 0 にならない。割線の傾き（平均変化率）として残り、$b \to a$ の極限で接線の傾き、すなわち微分係数 $f'(a)$ になる。



見えなくなっていた 2 本目の条件　$f'(a)=p$

3. 極限は、0 に潰れる情報を取り出す操作

ここで起きたことを振り返る。$b=a$ と置いてしまえば $0/0$ で何も残らない。しかし分子と分母が 0 に潰れていく**速さの比**には、ちゃんと情報が残っている。その比を取り出す操作が極限であり、取り出したものが微分係数である。微分係数の定義 $f'(a)=\lim_{b\to a}\{f(b)-f(a)\}/(b-a)$ そのものが、「0 に潰れていく情報を取り出す」形をしている。

極限 ＝ 0 に潰れていく情報を、潰れきる前に取り出す操作

つまり因数定理の拡張は、微分の応用としてたまたまこの単元に置かれたのではない。重なった根が隠していた条件を取り出す道具が、ちょうど微分だった。この話題は微分の考え方のど真ん中にある。

4. 微分すると、本当に商の項が消える

$(x-a)^2$ で割る式 $f(x)=(x-a)^2g(x)+px+q$ で確かめておく。微分すると $f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)+p$ で、$(x-a)^2$ は微分しても $(x-a)$ が 1 つ残るから、$x=a$ を代入すると商の項がまた消えて、極限で取り出したのと同じ $f'(a)=p$ が出る。余りは $f'(a)(x-a)+f(a)$（$x=a$ における接線の式）で、$f(a)=f'(a)=0$ なら $(x-a)^2$ で割り切れる。