指数法則型とコーシーの関数方程式

発展　高2数学・微分

授業の例題は、$f(x+y)=f(x)f(y)$ を満たし $x=0$ で微分可能で $f'(0)=2$ である $f(x)$ を求める問題でした[1]。この等式を手がかりに $f(0)$ の値を出し、微分可能性を示し、$\left(f(x)e^{-2x}\right)'$ を調べて $f(x)$ を決めます。このように「式の形」だけが与えられ、それを満たす関数を探す問題を**関数方程式**といいます。

この頁では、入試でよく見る2つの型を扱います。

- 指数法則型：$f(x+y)=f(x)f(y)$（a^x がこれを満たす）
- 加法型（コーシーの関数方程式）：$f(x+y)=f(x)+f(y)$（kx がこれを満たす）

どちらも、まず**うまい値を代入して性質を1つずつ取り出す**のが出発点です。ただし式だけから分かるのは「x が有理数のときの値」までで、関数全体を決めるには微分可能性や連続性のような条件がもう1つ要ります。この「どこまでが式だけで言えて、どこから追加の条件が要るのか」の線引きを見ていきます。

以下、$x,\ y$ は実数全体を動き、f は実数に実数を対応させる関数とします。

1. 指数法則型：代入で分かること

指数法則型の関数方程式

すべての実数 $x,\ y$ について

$$f(x+y)=f(x)f(y)\quad\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

が成り立つとき、f について何が言えるか。

代入する値を選ぶときの手がかりは、「式が簡単になる値」です。具体的には 0 を入れる、同じ値を2つ入れる、符号を逆にした値を組にする、の3つを順に試します。

① $y=0$ とおく。(A) は $f(x)=f(x)f(0)$、つまり

$$f(x)\{1-f(0)\}=0$$

になります。これがすべての x で成り立つので、$f(0)\neq 1$ なら $f(x)$ はどの x でも 0 です。逆に恒等的に 0 の関数は (A) を満たすので、これは本当に解の1つです。以下ではこの自明な解を除き、**$f(x)\neq 0$ となる x が少なくとも1つある**とします。すると $f(0)=1$ が決まります。

② $x = y = \dfrac{t}{2}$ **とおく。**(A) は

$$f(t) = \left\{ f\left(\frac{t}{2}\right) \right\}^2$$

になります。右辺は実数の2乗なので、どんな t についても $f(t) \geqq 0$ です。

③ $y = -x$ **とおく。**(A) の左辺は $f(0) = 1$ なので

$$f(x) f(-x) = 1$$

です。積が 1 なので $f(x)$ は 0 になれません。②とあわせると、$f(x) > 0$ **がすべての** x **で成り立ちます**。

④ **対数をとる。**③で f がつねに正と分かったので、$g(x) = \log f(x)$ とおけます。(A) の両辺の対数をとると

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

となり、積の関係が和の関係に変わりました。これは3節で扱う加法型そのものです。3節の結論（有理数 r について $g(r) = g(1)\, r$）を使うと、$a = f(1)$ とおいて

$$f(r) = e^{g(1) r} = a^r \qquad (r \text{ は有理数})$$

が得られます。たとえば $f(1) = 3$ と分かっていれば、$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$、$f(-2) = \dfrac{1}{9}$、$f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{9}$ まで代入だけで決まります。一方、$f(\sqrt{2})$ のような無理数での値はこの議論からは出てきません。その理由は3節で見ます。

2. 0 での微分係数を与えると全体が決まる

1節では、有理数での値しか決まりませんでした。ここに「$x = 0$ で微分可能」という条件を1つ足すと、関数がすべての実数で決まります。

> **0 での微分係数を足した問題**
>
> f が (A) を満たし、さらに $x = 0$ で微分可能で $f'(0) = c$（c は 0 でない定数）であるとする。$f(x)$ を求めよ。

$f(0) = 1$ **であること。**1節の①から、$f(0) = 1$ でなければ f は恒等的に 0 です。そのとき $f'(0) = 0$ となって $c \neq 0$ に反するので、$f(0) = 1$ です。

すべての x で微分可能であること。微分係数の定義に (A) を入れます。$h \neq 0$ として

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} \\ &= f(x)\cdot\frac{f(h)-f(0)}{h}\end{aligned}$$

です（$f(0)=1$ を使って 1 を $f(0)$ に書き換えました）。右端の分数は $h\to 0$ で $f'(0)=c$ に近づくので、左辺も極限をもち

$$f'(x) = c\,f(x)$$

がすべての x で成り立ちます。**(A) のおかげで、$x=0$ での情報がそのまま任意の点 x へ運ばれる**のがこの計算の要点です。

f を決める。$f'=cf$ から f を出すには、e^{-cx} を掛けた関数の導関数を見ます。

$$\begin{aligned}\bigl(f(x)e^{-cx}\bigr)' &= f'(x)e^{-cx} - c\,f(x)e^{-cx} \\ &= \{f'(x)-c\,f(x)\}e^{-cx} = 0\end{aligned}$$

導関数がつねに 0 なので $f(x)e^{-cx}$ は定数で、$x=0$ を入れるとその定数は $f(0)=1$ です。よって

$$f(x) = e^{cx}$$

授業の例題は $c=2$ の場合で、答えは e^{2x} でした。この道筋は f で割らないので、$f>0$ を先に示しておく必要がありません（$\dfrac{f'}{f}=c$ と変形して積分する道もありますが、その場合は1節の③で $f>0$ を確かめてから割ります）。

3. コーシーの関数方程式：有理数での値

コーシーの関数方程式

すべての実数 $x,\,y$ について

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \quad \cdots\cdots (\mathrm{B})$$

が成り立つとき、f について何が言えるか。

1節と同じく、簡単な値から代入していきます。目標は、x を何倍かしたときに $f(x)$ も同じ倍率になること（$f(rx)=rf(x)$）を、倍率 r を自然数・整数・有理数と広げながら示すことです。

㋐ $x=y=0$ **とおく。** $f(0)=2f(0)$ なので $f(0)=0$ です。

㋑ $y=-x$ **とおく。** $f(0)=f(x)+f(-x)$ と㋐から、$f(-x)=-f(x)$ です（f は奇関数）。

㋒ **自然数倍。** n を自然数として、$f(nx)=nf(x)$ を n についての数学的帰納法で示します。$n=1$ は明らかです。$f(nx)=nf(x)$ を仮定し、(B) で y を nx にすると

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(x)+f(nx) \\ &= f(x)+nf(x) \\ &= (n+1)f(x) \end{aligned}$$

となって、$n+1$ でも成り立ちます。

㋓ **整数倍。** m が負の整数なら $-m$ は自然数なので、㋒と㋑から

$$\begin{aligned} f(mx) &= f\big((-m)(-x)\big) \\ &= (-m)f(-x) \\ &= (-m)\big(-f(x)\big) = mf(x) \end{aligned}$$

です。$m=0$ は㋐の $f(0)=0$ そのものなので、$f(mx)=mf(x)$ はすべての整数 m で成り立ちます。

㋔ **有理数倍。** 自然数 n について、㋒の x を $\dfrac{x}{n}$ に置き換えると $f(x)=nf\left(\dfrac{x}{n}\right)$、つまり $f\left(\dfrac{x}{n}\right)=\dfrac{1}{n}f(x)$ です。これと㋓を組み合わせると、整数 m と自然数 n について

$$f\left(\frac{m}{n}\,x\right)=\frac{1}{n}\,f(mx)=\frac{m}{n}\,f(x)$$

となります。どの有理数も $\dfrac{m}{n}$ の形に書けるので、有理数 r と実数 x について $f(rx)=rf(x)$ です。

㋕ **まとめ。** ㋔で $x=1$ とおき、$k=f(1)$ と書くと

$$f(r)=kr \qquad (r \text{ は有理数})$$

が得られます。有理数の上では、f のグラフは直線 $y=kx$ に乗っています。

無理数での値は式だけでは決まらない

㋔の議論は「x を有理数倍する」ことしか使っていません。$\sqrt{2}$ は 1 の有理数倍ではないので、$f(\sqrt{2})$ は $f(1)$ から決まりません。決まるのは $f(\sqrt{2})$ を基準にした値（$f(3\sqrt{2})=3f(\sqrt{2})$ など）と、和の形の値（$f(1+\sqrt{2})=f(1)+f(\sqrt{2})$ など）だけです。

具体的に見てみます。$p,\,q$ を有理数として、$p+q\sqrt{2}$ の形の数だけを考え、そこで

$$f(p+q\sqrt{2}) = p+3q$$

と決めます（$p+q\sqrt{2}$ の形の書き方は1通りなので、これで値が1つに決まります）。2つの数を足すと p 同士、q 同士が足されるので、この f は (B) を満たします。有理数（$q=0$）では $f(r)=r$ で直線 $y=x$ に乗りますが、$f(\sqrt{2})=3$ は $1\cdot\sqrt{2}$ とは違います。

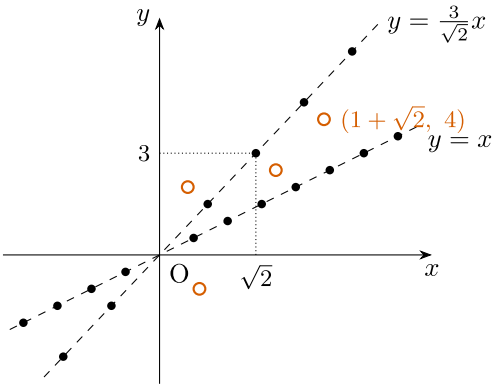


図1　$f(p+q\sqrt{2})=p+3q$ のグラフの点。有理数での点（黒丸）は直線 $y=x$ に、$\sqrt{2}$ の有理数倍での点（黒丸）は直線 $y=\frac{3}{\sqrt{2}}x$ に乗り、$1+\sqrt{2}$ のような和の形の点（白抜きの丸）はどちらの直線にも乗らない

図1で黒丸は2本の直線に分かれて並び、$1+\sqrt{2}$ のような和の形の点（白抜きの丸）はどちらの直線にも乗りません。この f は $p+q\sqrt{2}$ の形の数でしか定義していませんが、大学で学ぶ道具（ハメル基底）を使うと、同じ発想で実数全体に定義された (B) の解で、kx の形でないものが作れることが知られています[2]。

4. 連続性を足すと kx に限られる

（この節は発展的な内容です。）

3節で見たとおり、(B) だけでは $f(x)=kx$ と言い切れません。ところが「f は連続」という条件を足すと、無理数での値も決まります。

> **連続な解は kx だけ**
>
> f が (B) を満たし、すべての実数で連続ならば、$f(x)=f(1)\,x$ である。

理由は、どの実数も有理数で好きなだけ近づけるからです。実数 x に収束する有理数の数列 $r_1, r_2, \dots$ をとります（x の小数展開を第 n 位で打ち切った数を r_n にすればよい）。連続性から $f(r_n)\to f(x)$ で、3節より $f(r_n)=kr_n\to kx$ です。極限は1つなので $f(x)=kx$ となります。

実は、連続性は**1点だけ**で足ります。f が $x=a$ で連続だとして、任意の点 x とそこへ近づく数列 x_n をとると、(B) から

$$
\begin{aligned}
f(x_n) &= f\big((x_n - x + a) + (x - a)\big) \\
&= f(x_n - x + a) + f(x - a)
\end{aligned}
$$

です。$x_n - x + a \to a$ なので a での連続性から $f(x_n - x + a) \to f(a)$ となり、右辺は $f(a) + f(x - a) = f(x)$ に近づきます。つまり f は x でも連続です。1点での情報が全体へ運ばれるのは、2節の微分可能性と同じ仕組みです。

連続性のほかにも、次のどれか1つが成り立てば (B) の解は kx に限られることが知られています。

- ある1点で右側連続、または左側連続
- ある区間で単調（増加または減少）
- ある区間の上で値が有界（$a \leqq x \leqq b$ なら $c \leqq f(x) \leqq d$ となる定数 a, b, c, d がある）
- ある区間で積分可能

裏返すと、kx でない解は、どの点でも片側連続ですらなく、どの区間でも単調でも有界でもなく、どの区間でも積分できない関数です。このように直感に反する性質をもつ関数を、数学では「病的な」関数と呼びます。その極端さをよく表すのが次の定理です。

定理

f が (B) を満たし、kx の形でないとする。このとき $y = f(x)$ のグラフは xy 平面で稠密（ちゅうみつ）である。つまり、平面上のどんなに小さな円をとっても、その中にグラフの点がある。

証明の考え方（押すと開く）

$k = f(1)$ とします。f が kx の形でないので、$f(b) \neq kb$ となる実数 b があります。有理数 p, q について、(B) と3節から

$$
f(p + qb) = f(p) + f(qb) = kp + q\,f(b)
$$

なので、グラフ上の点 $\big(p + qb,\ f(p + qb)\big)$ は

$$
\begin{aligned}
&p\,\vec{u} + q\,\vec{v}, \\
&\vec{u} = (1,\ k), \\
&\vec{v} = \big(b,\ f(b)\big)
\end{aligned}
$$

と書けます。$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が平行になるのは $f(b) = kb$ のときだけなので、この2つは平行ではありません。平行でない2つのベクトルを使うと、平面のどの点も $s\vec{u} + t\vec{v}$（s, t は実数）と表せます。s, t をそれぞれ有理数 p, q で近似すれば、$p\vec{u} + q\vec{v}$ はその点にいくらでも近づきます。図2は、p, q を細かい刻みにするほど点の網目が細かくなり、平面を埋めていく様子です。

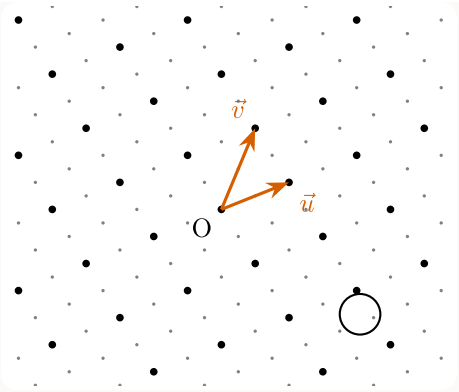


図2　平行でない2つのベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ と、$p\vec{u}+q\vec{v}$ の点。p, q が整数のときを黒丸、$\frac{1}{2}$ 刻みのときを小さな点で打った

1　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。

2　ハメル基底による構成には選択公理（「空でない集合の族から1つずつ要素を選べる」という公理）が要ります。高校の範囲では、「(B) だけでは kx と決まらない」ことを3節の $p+q\sqrt{2}$ の例で納得できれば十分です。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。
