無限に足すとどうなる？　等比級数とアキレスと亀

発展　中 3 数学・数列（等比数列）の“脱線”読み物　｜　無限の和と「極限」の入口

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots$ を無限に足すと、いくつになるだろうか。項を限りなく加えていくのに、和は**ちょうど** 1 という有限の値になる。無限個の和がなぜ有限にとどまるのかは、**等比数列の和の公式**から説明できる。これは**極限**を使う考え方の、もっともやさしい例でもある。

1. まず有限個の和（等比数列の和）

公比 r の等比数列を n 個足した和 $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ を求めよう。定石は r **倍してずらして引く**。

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}, \qquad rS_n = \quad ar + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

上から下を引くと途中が全部消えて $S_n - rS_n = a - ar^n$、よって

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

2. 無限に足す＝「近づく先」を値と呼ぶ

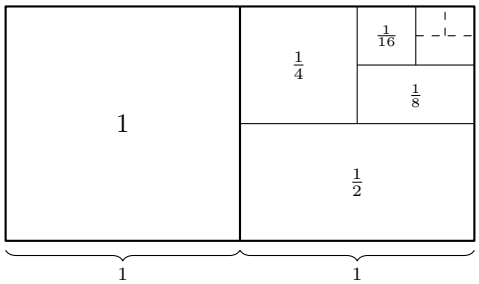
いま $|r| < 1$（すなわち $-1 < r < 1$）とする。n を大きくすると r^n は 0 に**近づく**。実際、絶対値をとると $|r^n| = |r|^n$ で、0 以上 1 未満の数 $|r|$ を何度もかけていくのだから限りなく小さくなる（例：$|r| = \frac{1}{2}$ なら $(\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{1024}$）。この、$n$ を限りなく大きくしたときに S_n が**近づく先**を、記号 lim（limit の略）を用いて $\lim_{n\to\infty} S_n$ と書き、これを「無限に足した値」と**定義**する。§ 1 の公式で $n \to \infty$ とすると、$r^n \to 0$ の部分だけが消えて

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\big(1 - r^n\big)}{1 - r} = \frac{a\big(1 - \underbrace{r^n}_{\to 0}\big)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

となる。まとめると

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1 - r} \qquad (|r| < 1)$$

つまり「無限に足す」とは、結局**有限個の和がどこへ近づくかを見る**ことにすぎない。これが**極限**の考え方である。$a = \frac{1}{2},\ r = \frac{1}{2}$ なら $\dfrac{1/2}{1 - 1/2} = 1$ で、冒頭の答えと一致する。なお、このように数列の項を次々に足し合わせたものを**級数**、とくに無限に足していくものを**無限級数**といい、等比数列から作った級数を**等比級数**という。



右の正方形（面積 1）が $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ でちょうど埋まる（$=1$）。左の正方形 1 つ分を足せば $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=2$。

3. $0.999\cdots=1$ は「ほぼ」ではなく「厳密に」

小数 $0.999\cdots$ は、各位の 9 を足し合わせたもので、

$$0.999\cdots=0.9+0.09+0.009+\cdots=0.9\cdot\left(\tfrac{1}{10}\right)^0+0.9\cdot\left(\tfrac{1}{10}\right)^1+0.9\cdot\left(\tfrac{1}{10}\right)^2+\cdots$$

と書ける。これは初項 $a=0.9$、公比 $r=\frac{1}{10}$ の等比級数だから、同じ公式で

$$0.999\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{0.9\big(1-\underbrace{(\frac{1}{10})^n}_{\to 0}\big)}{1-\frac{1}{10}}=\frac{0.9}{1-0.1}=\frac{0.9}{0.9}=1.$$

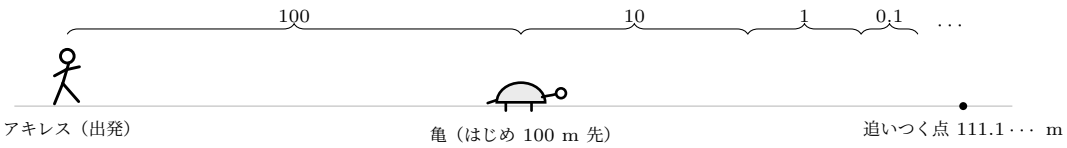
同じことは $\dfrac{1}{3}=0.333\cdots$ からも確かめられる。両辺を 3 倍すると、左辺は $\dfrac{1}{3}\times 3=1$、右辺は $0.333\cdots\times 3=0.999\cdots$ となるので、$0.999\cdots=1$。したがって $0.999\cdots$ は 1 に限りなく近い別の数ではなく、1 と**等しい**。

4. アキレスと亀：無限個の区間を有限時間で

足の速いアキレスが、前を行く亀を追う。「アキレスが亀のいた地点に着くころ、亀は少し先へ進む。そこへ着くとまた少し先へ…を**無限にくり返す**から、永遠に追いつけない」という古代の**パラドックス**だ。具体的に、アキレスは亀の 10 倍速く、亀ははじめ 100 m 先にいるとしよう。アキレスが亀のいた 100 m 地点に着くまでに、亀は（アキレスの $\frac{1}{10}$ の速さだから）$100\times\frac{1}{10}=10$ m 先へ進む。次にアキレスがその 10 m を追うあいだに、亀はさらに $10\times\frac{1}{10}=1$ m 先へ。これをくり返すと、**アキレスが追う距離は毎回 $\frac{1}{10}$ 倍ずつ縮んで** $100,\ 10,\ 1,\ 0.1,\ldots$ となる。その合計は、初項 100・公比 $\frac{1}{10}$ の等比級数として

$$\begin{aligned}100+10+1+0.1+\cdots&=100\left(\tfrac{1}{10}\right)^0+100\left(\tfrac{1}{10}\right)^1+100\left(\tfrac{1}{10}\right)^2+\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{100\big(1-\underbrace{(\frac{1}{10})^n}_{\to 0}\big)}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{0.9}=111.1\cdots\ \text{m}\end{aligned}$$

と**有限**になる。区間は無限個でも、その長さの和は有限である。各区間を走るのにかかる時間も、距離と同じく $\frac{1}{10}$ 倍ずつ縮んでいくから、その合計もやはり有限にとどまる。ゆえにアキレスは**有限の距離・有限の時間で追いつく**。「無限個に分けられる」ことと「追いつけない」ことは、まったく別である。級数の和が有限なら、ちゃんと追いつく。



アキレスが亀のいた地点に着くたび、亀はその $\frac{1}{10}$ だけ先へ進む。追う距離 $100, 10, 1, 0.1, \ldots$ は等比的に縮み、無限個あっても和は $111.1\cdots$ m にとどまる（横方向の縮みは模式的に描いた）。

まとめ：無限級数と極限

1. 有限和は $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$（$r$ 倍してずらして引く）。
2. $|r| < 1$ なら $r^n \to 0$（記号 $\to$ は「限りなく近づく」の意味）で、無限和 $= \dfrac{a}{1-r}$。「無限に足す」＝「有限和の**近づく先**」。
3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$、$0.999\cdots = 1$（厳密）。アキレスは $111.1\cdots$ m で追いつく。
4. $a \neq 0$ で $|r| \geq 1$ なら S_n は一つの値に近づかない（**発散**。$r \geq 1$ なら S_n の絶対値が限りなく大きくなり、$r \leq -1$ なら振動する）。近づく先があるのは**縮む**級数だけ。

確かめてみよう

- **電卓で部分和**：$\frac{1}{2}$ を足し、$+\frac{1}{4}$、$+\frac{1}{8}$…と続けると、和は 1 を超えて増え続けるのではなく $0.5, 0.75, 0.875, 0.9375, \ldots$ と 1 に迫るのを見る（$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ なら 2 に迫る）。
- **Desmos で近づく様子**：desmos.com/calculator に `S(n)=(1-0.5^n)/(1-0.5)` を入れ、`n` を大きくすると 2 に張りつくのが見える（$a = 1, r = \frac{1}{2}$ の場合。$\frac{1}{2}$ 始まりなら 1）。