ハノイの塔と2進法：どの円盤が、いつ動くか

発展読み物「ハノイの塔」の詳説（大学教養レベル）　｜　最適解の再帰構造から 2 進付値・定規数列・グレイコードまで

本編では、円盤 n 枚を 3 本の杭 A・B・C の間で動かす最小手数が $a_n = 2^n - 1$ 手であることを、漸化式 $a_n = 2a_{n-1} + 1$ から導いた。その導出の要は**再帰**であった。すなわち「n 枚を動かす」を「$n-1$ 枚を動かす」に帰着させ、実際の手順を一手ずつ具体的に追うことは一切しなかった。ではその**具体的な手順**のほうは、どんな構造をしているのか。じつは最適解は **2 進法で完全に符号化されている**。第 m 手でどの円盤が動くか、各円盤がどの杭に載っているか、総手数がなぜ $2^n - 1$ になるか。そのすべてが m を 2 進で書くだけで読み取れる。本稿ではこの対応を、背景から順にきちんと示す[*1]。

1. 最適解の再帰構造をもう一度

n 枚を A から C へ最小手数で移す手順は、次の三段だった：

1. 上の $n-1$ 枚を A から B へ移す（a_{n-1} 手）。
2. 最大円盤 n を A から C へ移す（1 手）。
3. $n-1$ 枚を B から C へ移す（a_{n-1} 手）。

いま**「第何手でどの円盤の番号が動くか」だけ**を、手の順に一列に並べたものを S_n と書こう（円盤は小さいほうから $1, 2, \ldots, n$ と番号を振る）。上の三段は、この列がそっくり**自分自身の一回り小さい版を 2 回くり返す**形をしていることを意味する：

$$S_n \;=\; \underbrace{S_{n-1}}_{①},\ \underbrace{n}_{②},\ \underbrace{S_{n-1}}_{③}$$

実際、$S_1 = (1)$ から始めると

$$S_2 = 1,2,1 \qquad S_3 = 1,2,1,\ 3,\ 1,2,1 \qquad S_4 = 1,2,1,3,1,2,1,\ 4,\ 1,2,1,3,1,2,1$$

となる。この**自己相似な列**こそ、以下すべての土台である。中央の項がちょうど各段の最大番号になり、その両側に一段下の模様がくり返される。

2. 背景：2 進法と 2 進付値 ν_2

2 進法とは、数を $0, 1$ の並びで、右の桁から順に $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ の重みで位取りする書き方である（例：$6 = 4 + 2 = 110_{(2)}$、$11 = 8 + 2 + 1 = 1011_{(2)}$）。ここで主役になるのは、各正整数 m に対して定まる 2 **進付値** $\nu_2(m)$ である。

[*1] 以下の命題はすべて、最適解を生成する短いシミュレーションで $n = 1, \ldots, 7$ の全 $2^n - 1$ 手について機械的に照合した（第 m 手の円盤 $= \nu_2(m) + 1$、円盤 k の移動回数 $= 2^{n-k}$、グレイコードの 1 ビット変化 $=$ 1 円盤の移動、杭位置の閉じた式）。

$\nu_2(m)$ とは

$\nu_2(m)$ を、m を割り切る 2 の最大べきの指数と定める。すなわち $m = 2^e \cdot (\text{奇数})$ と一意に書いたときの e のこと。これは m の 2 進表記で**右に並ぶ 0 の個数**に等しく、言いかえれば**最下位の 1 が右から数えて第 $(\nu_2(m)+1)$ 桁**にある、ということである。

$$\nu_2(1) = 0, \quad \nu_2(2) = 1, \quad \nu_2(3) = 0, \quad \nu_2(4) = 2, \quad \nu_2(6) = 1, \quad \nu_2(8) = 3.$$

たとえば $6 = 110_{(2)}$ は末尾の 0 が 1 個で $\nu_2(6) = 1$、最下位の 1 は右から第 2 桁。$12 = 1100_{(2)}$ なら $\nu_2(12) = 2$ である。

3. 主結果：第 m 手で動く円盤は $\nu_2(m) + 1$

定規数列との一致

n 枚のハノイの塔の最適解において、**第 m 手で動かす円盤の番号は $\nu_2(m) + 1$ に等しい**（$1 \le m \le 2^n - 1$）。番号の並び S_n は $m = 1, 2, 3, \ldots$ に沿って

$$1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 1,\ 4,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3, \ldots$$

となり、これは**定規数列**（ruler sequence, OEIS A001511）と呼ばれる、ものさしの目盛りの高さと同じ模様である。

証明（n に関する帰納法）． $n = 1$ のときは第 1 手で円盤 1 を動かすだけで、$\nu_2(1) + 1 = 1$ と合う。次に、$n-1$ 枚で主張が成り立つと仮定する。全体は $2^n - 1$ 手で、前半 S_{n-1} は $2^{n-1} - 1$ 手だから、**中央の第 2^{n-1} 手**が最大円盤 n を動かす手である。$2^{n-1} = 1\underbrace{00\cdots0}_{n-1}{}_{(2)}$ ゆえ $\nu_2(2^{n-1}) = n - 1$ で、$\nu_2 + 1 = n$。中央は合う。

残りは前半（第 $1 \sim 2^{n-1}-1$ 手）と後半（第 $2^{n-1}+1 \sim 2^n-1$ 手）で、どちらも中身は S_{n-1} である。前半では手番 m がそのまま $n-1$ 枚の問題の手番だから、帰納法の仮定でその円盤は $\nu_2(m)+1$。後半では、第 $(2^{n-1}+j)$ 手（$1 \le j \le 2^{n-1} - 1$）が S_{n-1} の第 j 手と**同じ円盤**を動かす。ここで $j < 2^{n-1}$ だから、$2^{n-1} + j$ の 2 進表記は j **を $n-1$ 桁で（足りない上の桁は 0 で埋めて）書いた表記の左に 1 を一つ足しただけ**で、右側の桁、とりわけ末尾の 0 の個数は、そっくり変わらない。ゆえに $\nu_2(2^{n-1} + j) = \nu_2(j)$ となり、動かす円盤も $\nu_2(j) + 1$ で一致する。以上で n 枚でも主張が成り立つ。
■

3 枚（全 7 手）で読み取る

最初は 3 枚すべてが杭 A：。各手で m を 2 進で書き、**枠で囲んだ最下位の 1 の桁位置**が、そのまま動かす円盤の番号になる（配置図は左から A・B・C、円盤は大きいほど幅広で濃い）。

手数 m	m を 2 進で（最下位の 1 を□）	$\nu_2(m)+1$ ＝動かす円盤	その手のあとの配置
1	$00\boxed{1}$	$0+1=$ 円盤 1	
2	$0\boxed{1}0$	$1+1=$ 円盤 2	
3	$01\boxed{1}$	$0+1=$ 円盤 1	
4	$\boxed{1}00$	$2+1=$ 円盤 3	
5	$10\boxed{1}$	$0+1=$ 円盤 1	
6	$1\boxed{1}0$	$1+1=$ 円盤 2	
7	$11\boxed{1}$	$0+1=$ 円盤 1	

4. 移動回数と総手数を数え直す

上の対応から、各円盤の**働きぶり**も見える。円盤 k が動くのは $\nu_2(m)+1=k$、すなわち $\nu_2(m)=k-1$ のとき、つまり m が 2^{k-1} の**奇数倍**のときである（$m=2^{k-1},\ 3\cdot 2^{k-1},\ 5\cdot 2^{k-1},\dots$）。$1\le m\le 2^n-1$ の範囲にこれは

$$\text{円盤 } k \text{ の移動回数} = 2^{n-k} \quad \text{(回)}$$

だけある。番号が 1 大きいと回数は半分、最大円盤 n はちょうど 1 回。総手数はこれらの和で、**初項 1・公比 2・項数 n の等比数列の和**として

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} = 2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1 = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1.$$

2^n-1 を 2 進で書けば $\underbrace{11\cdots1}_{n}{}_{(2)}$（1 が n 個）で、各円盤がちょうど一つの桁を受け持つ、と読める。本編で漸化式から得た 2^n-1 が、ここでは**一手ごとの数え上げ**から再び現れた。

5. グレイコード：配置そのものを 2 進で読む

「どの円盤が動くか」だけでなく、**各時点の配置**も 2 進と結びつく。鍵は**反射 2 進グレイコード**

$$G(m) = m \oplus \lfloor m/2 \rfloor \qquad (\oplus \text{ はビットごとの排他的論理和})$$

である。$G(0),G(1),G(2),\cdots = 0,1,3,2,6,7,5,4,\dots$ は、**隣り合う 2 数がちょうど 1 ビットだけ違う**という性質をもつ 0 以上の整数の並べ替えである。

1 手 = 1 ビット反転 = 1 円盤の移動

$G(m-1)$ と $G(m)$ が異なるただ一つのビットは、**右から第 $(\nu_2(m)+1)$ 桁**にある（これはグレイコードの定義からすぐ従う）。一方ハノイの第 m 手で動くのは円盤 $\nu_2(m)+1$ であった。よって、

$$m \text{ を 1 進めて配置を 1 手変える} \iff G(m) \text{ の第 } (\nu_2(m)+1) \text{ 桁が反転する}$$

が完全に対応する。ハノイの最適解を進めることは、**グレイコードで数を数えること**にほかなら

ない。第 k 桁が円盤 k を担い、桁が反転するたびにその円盤が動く。

さらに、各円盤の**行き先**にも規則がある。円盤 k は動くたびに、三つの杭を**つねに同じ向き**に巡回する。向きは $n-k$ の偶奇で決まり、

$$n-k \text{ が偶}:\ \mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B}\to\mathrm{A}\to\cdots, \qquad n-k \text{ が奇}:\ \mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}\to\cdots$$

である（最大円盤 $k=n$ は $n-k=0$ で偶、一度だけ $\mathrm{A}\to\mathrm{C}$。最小円盤 $k=1$ は n が奇なら $\mathrm{A}\to\mathrm{C}$ から、偶なら $\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ から動きだす）。第 m 手までに円盤 k が動いた回数を $t_k(m)=\left\lfloor(\lfloor m/2^{k-1}\rfloor+1)/2\right\rfloor$ とすれば、**円盤 k の載る杭は上の巡回を $t_k(m)$ 歩進めた先**であり、これで**任意の時刻 m の全配置**が閉じた式で定まる。

6. 応用：目隠しでも解ける反復アルゴリズム

最小円盤の巡回規則だけを取り出すと、**再帰も記憶も使わず**に最適解を打てる。次を交互にくり返すだけでよい。

反復解（グレイコード順）

1. **奇数手**（第 $1,3,5,\ldots$ 手）では、**最小円盤**を巡回の向きに 1 つ進める（n が偶なら $\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}$、$n$ が奇なら $\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B}\to\mathrm{A}$）。
2. **偶数手**では、**最小円盤を含まない**唯一の合法手を打つ（そのような手はつねにちょうど 1 通り）。

これを 2^n-1 手くり返すと、円盤はすべて C に正しく積み上がる。

なぜ偶数手の合法手が一意かというと、最小円盤以外の 2 本の杭の一番上を比べれば、小さいほうを大きいほうへ載せる手しか許されないからである（一方の杭が空なら、もう一方の一番上をその空の杭へ移す手だけが許される。両方とも空になるのは全円盤が最小円盤と同じ杭にあるとき、すなわち最初と最後の配置だけなので、偶数手では起こらない）。奇数手・偶数手いずれも「次の一手」がその場の状況だけで決まるので、先の手順を覚えておく必要がない。本編で見た**再帰**は「全体を追わずに済ませる」考え方だったが、こちらは反対に、**一手ごとの確定した規則**として同じ最適解を与える。同じ最適解を、上からたたむ再帰と、下から数えるグレイコードという二つのまったく異なる言葉で言い表せる、というのがこの対応の要点である。

まとめ：ハノイの塔と 2 進法

1. 最適解の円盤番号列は自己相似 $S_n=S_{n-1},n,S_{n-1}$。第 m 手の円盤は $\nu_2(m)+1$（定規数列）。
2. 円盤 k は 2^{n-k} 回動き、総和は 2^n-1。$2^n-1=\underbrace{1\cdots1}_{n}{}_{(2)}$。
3. 配置の遷移は**グレイコード** $G(m)=m\oplus\lfloor m/2\rfloor$ の 1 ビット反転。各円盤は杭を一方向に巡回し、配置は m から閉じた式で定まる。
4. 最小円盤を巡回・残りは唯一手、の**反復アルゴリズム**で、記憶なしに最適解を打てる。