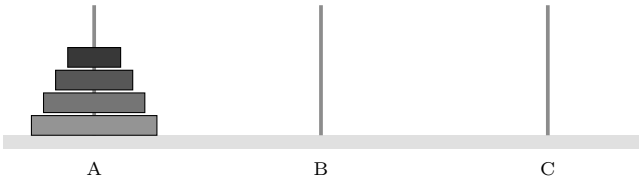
ハノイの塔：漸化式が解けると「世界の寿命」がわかる!?

発展　中 3 数学・数列（漸化式）の“脱線”読み物　｜　円盤 n 枚を動かす最小手数を漸化式から求める

3 本の杭 A・B・C があり、A に大きさの違う n 枚の円盤が「大きいものほど下」に積んである。これを全部 C へ移したい。ルールは 2 つ。ひとつは、**一度に動かせるのは各杭のいちばん上の 1 枚だけ**。そしてもうひとつがこの問題でいちばん大事なルールで、

どの瞬間も、小さい円盤の上に大きい円盤を載せてはいけない

（言いかえれば、どの杭もつねに「大きいものほど下」を保っていなければならない）。この制約があるからこそ手数がふくらみ、あとで見るように**漸化式**がそのからくりを解き明かす。最小で何手かかるだろうか。



1. 漸化式を立てる：大きい 1 枚を動かすには

n 枚を A から C へ移す最小手数を a_n とする。着目するのは**いちばん下の最大円盤**だ。これを A から C へ動かせるのは、その上の $n-1$ 枚がすべてどいて最大円盤がむき出しになり、しかも移動先の C が空になった瞬間しかない。そこで手順を次の 3 段に分ける：

1. まず**上の $n-1$ 枚**を、ルールを守って 1 枚ずつ動かし、いったん空いている杭 B へ移しておく。
2. むき出しになった**最大円盤**を A から C へ動かす（1 手）。
3. B に集まった $n-1$ 枚を、最後に（やはり 1 枚ずつ）C へ移す。

真ん中の②は 1 手。残る問題は、①と③がそれぞれ何手かということだ。結論から言うと**①も③もちょうど a_{n-1} 手**になる。「a_{n-1}」とは $n-1$ 枚を別の杭へ移す最小手数のことだから、これは①③がどちらも**円盤 $n-1$ 枚のハノイの塔そのもの**だと言っているに等しい。なぜそう言い切れるのか。鍵は次の一点にある。

最大円盤は「床」とみなせる

最大円盤はどの円盤よりも大きいので、その上には**どんな円盤を載せてもルール違反にならない**。だから最大円盤がある杭に置かれているあいだは、それを**その杭にくっついた床の一部**と思ってよい。残りの円盤をどう動かすうえでも、最大円盤は制約を一切生まないからだ。

これを使うと①③の中身がはっきりする。①では、A の底に最大円盤があるが、いま見たとおりこれ

は床とみなせるので、実際に相手にするのは**上の $n-1$ 枚だけ**。つまり①は「$n-1$ 枚を A から B へ移す」という**一回り小さい同じ問題**である。空いている C を作業に使ってよい点まで込めて、条件はもとの問題の杭の名前を取り替えただけだから、手数は a_{n-1}。

③も同じ構図だ。このとき C の底にはすでに最大円盤が置かれているが、これも床とみなせるので、動かすのは**B にある $n-1$ 枚だけ**。すなわち③は「$n-1$ 枚を B から C へ移す」というやはり $n-1$ 枚の問題で、手数は a_{n-1}。しかも③に入る時点で、B の $n-1$ 枚は①でルールを守って動かした結果**大きいものほど下**に正しく積まれており、そのまま次の問題の初期配置になっている。

こうして n 枚の問題は、**同じ形の $n-1$ 枚の問題 2 回ぶんと、最大円盤の 1 手**にきれいに分解できた。合わせて、$a_1 = 1$ と

$$a_n = 2\,a_{n-1} + 1$$

という漸化式が立つ。あとはこれを**解く**だけで、最小手数がぴたりと分かる。

立ちどまって振り返ると、私たちは最大円盤の 1 手のまわりで**「n 枚を $n-1$ 枚 2 つに置きかえる」という一段の分解**をしただけで、実際の手順を一手ずつ具体的にたどってはいない。同じ形の一回り小さい問題に帰着させ、その関係を式にしたものが漸化式である。この**「自分より小さい同じ問題に投げてしまう」考え方（再帰）**のおかげで、あとで見る $2^{64}-1$ という天文学的な手数さえ、頭の中で操作を全部並べることなく求められる。ここにこの問題の難しさと、それを飼いならす**漸化式の強さ**がある。裏を返せば、この分解が**一通りに定まる**からこそきれいに解けたのであって、分解の仕方に選択肢が生まれたとたんに問題は難しくなる（最後のコラムで触れる杭 4 本以上が、まさにその例である）。

2. 解く：習った二項間漸化式の手順がそのまま使える

$a_n = 2a_{n-1} + 1$ は、隣り合う 2 項を結ぶ**二項間漸化式**である。授業で習った**特性方程式**を使う手順をそのままなぞろう。まず、漸化式の a_n と a_{n-1} をともに α に置きかえた方程式 $\alpha = 2\alpha + 1$ を解くと $\alpha = -1$。この α を代入した式

$$-1 = 2\cdot(-1) + 1$$

を、もとの漸化式 $a_n = 2a_{n-1} + 1$ から**辺々引く**と、じゃまな定数 $+1$ が消えて

$$a_n - (-1) = 2\{a_{n-1} - (-1)\}, \qquad \text{すなわち} \qquad a_n + 1 = 2\,(a_{n-1} + 1)$$

となる。ここで $b_n := a_n + 1$ とおくと $b_n = 2\,b_{n-1}$、つまり数列 $\{b_n\}$ は**公比 2 の等比数列**をなす。初項は $b_1 = a_1 + 1 = 2$ だから $b_n = 2\cdot 2^{n-1} = 2^n$、よって $a_n + 1 = 2^n$、すなわち

$$a_n = 2^n - 1$$

試しに漸化式 $a_n = 2a_{n-1} + 1$ を、$a_1 = 1$ から手でたどってみよう：

$$a_2 = 2\cdot 1 + 1 = 3, \quad a_3 = 2\cdot 3 + 1 = 7, \quad a_4 = 2\cdot 7 + 1 = 15, \quad a_5 = 2\cdot 15 + 1 = 31, \ \ldots$$

たしかに $2^n - 1$（$1, 3, 7, 15, 31, \ldots$）とぴたり一致する。図の 4 枚なら $2^4 - 1 = 15$ 手だ。

コラム：これは「最小」なのか

2^n-1 手で移せるのは上で示したとおり。実はこれが**最小**でもある。最大円盤はどこかで必ず**最低 1 回**は動かねばならず、その瞬間には残り $n-1$ 枚が **1 本の杭に退避しきって**いなければならない。最大円盤を**初めて**動かすまでに「$n-1$ 枚を 1 本の杭へどける」のに最低 a_{n-1} 手、**最後に**動かして C に置いた瞬間にも残り $n-1$ 枚は 1 本の杭に集まっているので、そこから「$n-1$ 枚を C へ戻す」のにまた最低 a_{n-1} 手が要る（前者は初めて動かす前、後者は最後に動かした後なので重ならない）。だから $a_n \geq 2a_{n-1}+1$。到達可能な 2^n-1 が、同時に下限でもある。

3. 伝説：「ハノイの塔」と世界の寿命

ここまで「3 本の杭に円盤を積みかえるパズル」と呼んできたが、これには**ハノイの塔**という名前がある。1883 年にフランスの数学者リュカ（É. Lucas）が考案して玩具として売り出したもので[*1]、その商品には次の言い伝えが添えられていた。ある寺院で僧たちが 64 枚の黄金円盤を（このパズルと同じ規則で）休みなく移し続けており、それを移し終えたとき世界が終わる、というのである。必要な手数は

$$a_{64} = 2^{64}-1 = 18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615 \ \approx 1.8\times 10^{19} \text{ (手)}.$$

毎秒 1 手で休まず動かしても約 **5850 億年**。宇宙の年齢（約 138 億年）の **40 倍以上**かかる。つまり、たとえ僧が一手も休まず動かし続けても、私たちが生きているあいだに終わってしまう心配はまずない。円盤が 1 枚増えるたびに手数が**約 2 倍**になる（指数の爆発）のが、この途方もない大きさを生んでいる。

枚数 n	1	2	3	5	10	20	30	64
手数 2^n-1	1	3	7	31	1023	約 10^6	約 10^9	約 1.8×10^{19}

まとめ：ハノイの塔

1. 「上の $n-1$ 枚を避難 → 最大を移動 → $n-1$ 枚を戻す」で漸化式 $a_n = 2a_{n-1}+1$。
2. a_n+1 が公比 2 の等比数列 → $a_n = 2^n-1$。これは達成値かつ**最小**。
3. 1 枚増えると手数は約 2 倍（指数爆発）。64 枚で $\approx 1.8\times 10^{19}$ 手＝宇宙年齢の 40 倍超。

コラム：杭を増やすと？（4 本以上のハノイの塔）

杭が 3 本だと最小 2^n-1 手だった。杭を増やすと、**よけておく円盤を複数の杭に分散できる**ぶん、もっと少ない手数で済む。とくに杭が $n+1$ 本以上あれば、上の $n-1$ 枚を 1 **枚ずつ別々の空き杭に**のけられるので、「$n-1$ 枚をのける（$n-1$ 手）→ 最大円盤を移す（1 手）→ $n-1$ 枚を戻す（$n-1$ 手）」で、合わせて $2n-1$ **手**で完成する（たとえば杭 4 本・円盤 3 枚なら $2\cdot 3-1=5$ 手）。指数の 2^n-1 が一気に 1 次式 $2n-1$ まで小さくなるのは劇的だ。

では、杭 4 本で円盤がもっと多いときの最小手数は？ じつはこれは 3 本のときのようなきれいな

[*1] リュカは「*N.* Claus（de Siam）＝シャムのクラウス教授」という偽名で発売した。これは本名 Lucas d'Amiens（アミアンのリュカ）などのアナグラムである。下に述べる「ベナレスの寺院で 64 枚の黄金円盤を移し終えると世界が終わる」という伝説は、この玩具に同梱されたリーフレットに記されていたものである。出典：ウィキペディア日本語版「ハノイの塔」（2026 年 7 月 22 日閲覧）。

公式にはならず、最小手数を求める問題は**ずっと難しくなる**。退避先が複数あると、さきほどの**「小さい問題への分解」が一通りに決まらず**、上の何枚を・どの空き杭へ・どうよけるかに選択肢が生まれて、どの分け方が最短かを別に探さねばならないからだ（3 本のとき再帰がそのまま最小手数を与えたのは、分解が一意だったからにほかならない）。実際、杭 4 本の最小手数がようやく証明されたのは 2014 年のことで[a]、5 本以上ではいまも完全には決着していない。身近なパズルの一歩先に、まだ研究されている問題が広がっている。

[a] 4 本以上での最短手順の候補は 1941 年に J. S. Frame と B. M. Stewart が独立に与えたが（**Frame–Stewart のアルゴリズム**）、それが本当に最小だという証明は長く未解決だった。杭 4 本については T. Bousch が 2014 年に解決した（“La quatrième tour de Hanoï,” *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **21** (2014), 895–912）。5 本以上での最適性はいまも未解決である（Frame–Stewart 予想）。