陰関数の微分

解説 高2数学・微分

授業の例題は、放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ を通る円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ のうち、P における $\frac{dy}{dx}$ と $\frac{d^2y}{dx^2}$ の値が放物線のものと等しくなる円を求める問題でした[1]。円の式を y について解くと平方根と $\pm$ が出てきて計算が重くなるので、解答では円の式を解かずに、そのまま両辺を x で微分しています[2]。

この頁では、まず解答の中で説明を省いた2つの点（微分係数の記号と、$y-b\neq 0$ としてよい理由）を補います。そのあとで、陰関数の微分を例題から切り離して整理します。

1. 縦棒と添字のついた記号

解答では、点 P での傾きを $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\alpha,\ y=\beta}$ と書きました。縦棒の左にある $\frac{dy}{dx}$ が導関数で、縦棒の右下にあるのが代入する値です。全体で「導関数を x, y の式として求めておき、そこへ $x=\alpha$, $y=\beta$ を入れた値」、つまり点 (α,β) における微分係数を表します。

陰関数のまま微分すると、導関数の中に x と y の両方が残ります。そのため代入する値も x と y の2つを書いています。同じことを日本語で「y' に $x=\alpha$, $y=\beta$ を代入した値」と書いても構いませんが、記号なら式の途中に置けるので答案を短くできます。この先の授業でも使う書き方です。

2. 円の上で $\frac{dy}{dx}$ が値をもたない2点

円の式の両辺を x で微分すると

$$2(x-a)+2(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

です。ここから $\frac{dy}{dx}$ を取り出すには $y-b$ で割る必要があります。割れないのは $y=b$ のとき、すなわち円の上で中心と同じ高さにある点で、円の式に $y=b$ を入れると $x=a\pm r$ なので、そのような点は $(a-r,\ b)$ と $(a+r,\ b)$ の2つです（図1）。$y\neq b$ の点では $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b}$ と求まります。

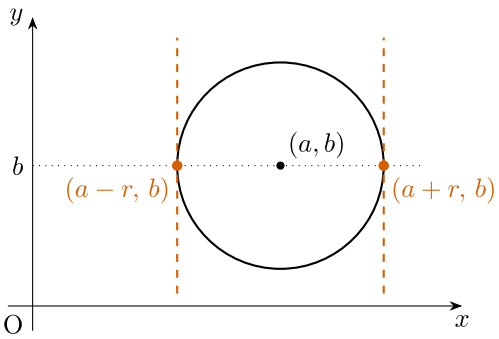


図1　中心 (a, b)・半径 r の円。中心と同じ高さの2点 $(a-r, b)$ と $(a+r, b)$ では接線が縦（y 軸と平行）になる

図1の2点で、円の接線は縦の直線（y 軸と平行な直線）です。$\frac{dy}{dx}$ を「x を少し動かしたとき、y がその何倍動くか」という比として読むと、事情がつかめます。この2点に近づくほど、x がわずかしか動かないのに y は大きく動くので、比はいくらでも大きくなります。縦の直線に傾きの数値を割り当てられないのと同じで、この2点では $\frac{dy}{dx}$ は値をもちません。

例題の条件は「P における $\frac{dy}{dx}$ が放物線の傾き α に等しい」なので、P での $\frac{dy}{dx}$ は値をもっています。したがって P は上の2点のどちらでもなく、$\beta - b \neq 0$ として割り算を進めて構いません。答案では、図1のような図を添えて「$y = b$ の点では $\frac{dy}{dx}$ が定まらないので $\beta \neq b$」と一言書いておけば十分です。

3. 陽関数に直すか、式のまま微分するか

$y = x^2 + 1$ のように「$y =$（x の式）」の形で曲線を表すことを**陽関数表示**、$x^2 + y^2 = 1$ のように x と y が混ざった等式で表すことを**陰関数表示**といいます。陰関数表示の曲線の $\frac{dy}{dx}$ を求める方法は2つあります。

> **陰関数表示の曲線の $\frac{dy}{dx}$ の求め方**
>
> 1. 等式を y について解き、陽関数表示にしてから微分する。
> 2. 等式のまま両辺を x で微分する。y は x の関数とみなすので、y を含む項は合成関数の微分により $\frac{d}{dx}g(y) = g'(y)\frac{dy}{dx}$ となる。

2番目の方法（陰関数微分）は、新しい公式を使っているわけではなく、合成関数の微分を各項に当てはめているだけです。

2つの方法は、結果の形が違います。1番目の方法では $\frac{dy}{dx}$ が x だけの式になるので、x の範囲全体で符号を調べられます。2番目の方法では計算は軽く済みますが、$\frac{dy}{dx}$ に y が残ります。座標の分かった1点での値を求めるなら x, y を代入すれば終わりですが、符号を範囲全体で調べるのには向きません。この違いから、何を求めるかに応じて次のように選びます。

接線を求めるときは、接点での傾きの値だけが要るので、式のまま微分します。たとえば曲線 $x^2 + xy + y^2 = 3$ は点 $(1, 1)$ を通ります。両辺を x で微分すると

$$2x + \left(y + x\frac{dy}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

となり、$(1,1)$ では $\frac{dy}{dx} = -1$ です。したがって接線は $y = -x + 2$ です。この曲線を y について解くには2次方程式の解の公式が要り、そこから微分するのは遠回りです。

グラフを描くときは、増減表のために $\frac{dy}{dx}$ の符号が範囲全体で要るので、陽関数表示に直します。たとえば曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$ を式のまま微分すると $2y\frac{dy}{dx} = 2x - 4x^3$ から $\frac{dy}{dx} = \frac{x(1-2x^2)}{y}$ となります。同じ x でも $y > 0$ の点と $y < 0$ の点とで符号が逆になるので、この式だけでは増減表が書けません。

そこで陽関数表示に直します。まず右辺は 0 以上でなければならないので、x の範囲は $-1 \leqq x \leqq 1$ です。また式に x も y も2乗の形でしか入っていないので、x を $-x$ に、y を $-y$ に替えても式は変わりません。よって曲線は y 軸に関しても x 軸に関しても対称で、$0 \leqq x \leqq 1,\ y \geqq 0$ の部分を調べれば全体が分かります。この部分では $y = x\sqrt{1-x^2}$ と書けて

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (0 \leqq x < 1)$$

です。$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ までは増加して $y = \frac{1}{2}$ に達し、そこから $x = 1$ で $y = 0$ まで減少します。$x \to 1$ では $\frac{dy}{dx} \to -\infty$ なので、点 $(1,0)$ での接線は縦です（§2 の円の2点と同じ状況です）。これを2つの軸で折り返すと図2の曲線になります。

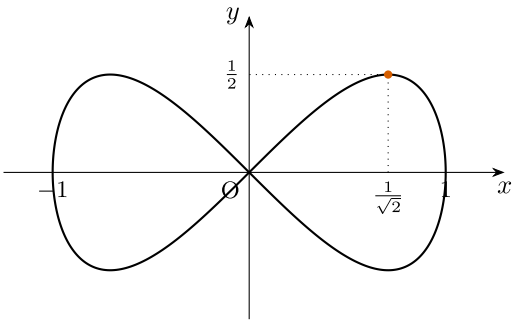


図2　曲線 $y^2 = x^2(1-x^2)$。原点で交差する横長の8の字で、x は -1 から 1、最大の高さは $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ で $\frac{1}{2}$

面積を求めるときは、$\int\{(\text{上の曲線}) - (\text{下の曲線})\}\,dx$ の形に組むために、どちらが上にあるかを知る必要があります。そのため陽関数表示に直して考えるのが基本です。図2の曲線が囲む部分の面積なら、対称性から第1象限の部分の4倍として

$$4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

と求まります。

陰関数表示の曲線のグラフを描く手順

1. y について解き、陽関数表示で増減を調べる。
2. 根号の中が 0 以上・分母が 0 でないなどの条件から、x の範囲を先に決める。
3. 対称性を探して、調べる範囲を狭める。x が x^2 や $|x|$ の形でしか現れなければ、x を $-x$ に替えても式は変わらないので y 軸対称。y についても同様で、こちらは x 軸対称。

$x^\alpha + y^\alpha = 1$ の形の曲線

陰関数微分の練習でよく扱われる曲線に、$x^\alpha + y^\alpha = 1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ があります（$\alpha > 0$）。$\alpha = 1$ なら線分、$\alpha = 2$ なら四分円です。α を大きくすると曲線は外へふくらみ、正方形の角 $(1, 1)$ に近づいていきます。逆に α を 1 より小さくすると、曲線は原点の側へへこみ、2つの座標軸に近づいていきます（図3）。

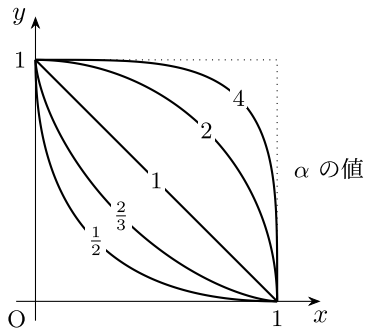


図3　$x^\alpha + y^\alpha = 1$ の第1象限の部分を $\alpha = \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 1,\ 2,\ 4$ について重ねた図。α が大きいほど外へふくらむ

このうち2つには名前がついています。$\alpha = \frac{1}{2}$ のときは放物線の一部です（両辺を2回2乗して整理すると $(x-y)^2 - 2(x+y) + 1 = 0$ になり、軸が直線 $y = x$ の放物線を表します）。$\alpha = \frac{2}{3}$ のときはアステロイド（星芒形）と呼ばれる曲線です。どちらも接線について、次の性質をもちます。

放物線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ の上の点を $(s^2,\ t^2)$（$s,\ t > 0,\ s + t = \sqrt{a}$）とします。陰関数微分で $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\frac{t}{s}$ なので、この点での接線は $tx + sy = st(s+t)$、すなわち

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \sqrt{a}$$

です。x 軸との交点を P、y 軸との交点を Q とすると $\mathrm{OP} = s\sqrt{a},\ \mathrm{OQ} = t\sqrt{a}$ で、$\mathrm{OP} + \mathrm{OQ} = (s+t)\sqrt{a} = a$ となり、接点によらず一定です（図4）。

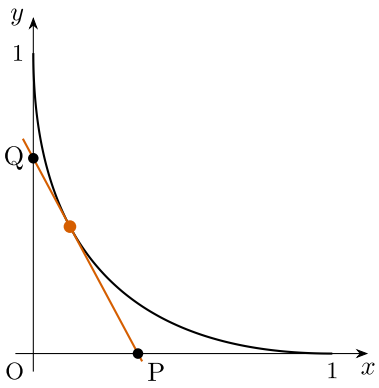


図4　放物線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の接線が x 軸と P、y 軸と Q で交わる図。$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=1$

アステロイド $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ の上の点は $(a\cos^3\theta,\ a\sin^3\theta)$（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）と書けます。陰関数微分で $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=-\tan\theta$ なので、接線は $x\sin\theta+y\cos\theta=a\sin\theta\cos\theta$、すなわち

$$\frac{x}{\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=a$$

です。P、Q を同じように決めると $\mathrm{OP}=a\cos\theta$, $\mathrm{OQ}=a\sin\theta$ で、$\mathrm{PQ}=a$ が接点によらず一定です（図5）。

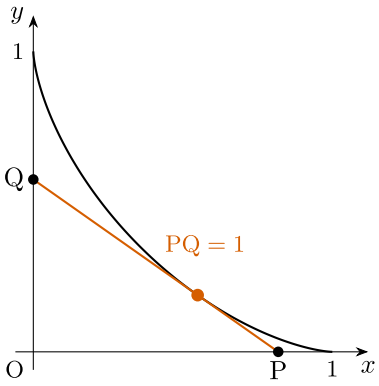


図5　アステロイド $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ の接線が x 軸と P、y 軸と Q で交わる図。$\mathrm{PQ}=1$

この2つの性質は逆向きにも読めます。x 軸上の点 P と y 軸上の点 Q を、$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}$ が一定になるように動かすと、直線 PQ が通過する範囲の境界（直線 PQ の包絡線）は放物線になります。PQ が一定になるように動かすと、包絡線はアステロイドになります。

4. 二次曲線の第2次導関数

例題では、円の $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-a}{y-b}$ をもう一度 x で微分しました。商の微分をして、途中で出てくる $\frac{dy}{dx}$ に上の式を戻すと

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{(y-b)-(x-a)\frac{dy}{dx}}{(y-b)^2} \\
&= -\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(y-b)^3} \\
&= -\frac{r^2}{(y-b)^3}
\end{aligned}
$$

となります。最後の等号では円の式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を使いました。分子が定数になるので、$\frac{d^2y}{dx^2}$ の符号は $y-b$ の符号だけで決まり、円の上半分（$y>b$）では負、下半分では正です。

楕円や双曲線でも、分子に元の曲線の式がそのまま現れて定数に置き換わります。双曲線 $x^2-4y^2=4$ で確かめます。両辺を x で微分すると

$$
2x-8y\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{4y}
$$

です。これをもう一度 x で微分して

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{y-x\frac{dy}{dx}}{4y^2} \\
&= \frac{4y^2-x^2}{16y^3} \\
&= -\frac{4}{16y^3} = -\frac{1}{4y^3}
\end{aligned}
$$

となります（3つ目の等号で $x^2-4y^2=4$ を使いました）。一般の楕円 $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$ でも同じ計算で $\frac{dy}{dx}=-\frac{q^2x}{p^2y}$、$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{q^4}{p^2y^3}$ です。

1　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。

2　この問題の解答の流れ。放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ では $\frac{dy}{dx}=x$、$\frac{d^2y}{dx^2}=1$ なので、P での値は α と 1。円については §2 と §4 の結果から $-\frac{\alpha-a}{\beta-b}=\alpha$、$-\frac{r^2}{(\beta-b)^3}=1$（§2 のとおり $\beta\neq b$）。前者から $\alpha-a=-\alpha(\beta-b)$ で、円が P を通ることから $r^2=(1+\alpha^2)(\beta-b)^2$。これを後者に入れると $\beta-b=-(1+\alpha^2)$。$\beta=\frac{1}{2}\alpha^2$ と合わせて $a=-\alpha^3$, $b=\frac{3}{2}\alpha^2+1$, $r=(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}$ が求める円の中心と半径である。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。
