逆関数の微分

解説 高2数学・微分

ここでは、$f(x)$の逆関数$f^{-1}(x)$の導関数を計算することを考えます。……が、その前に逆関数の復習をしておきましょう。

一般に逆関数とは、

$$y=f(x)\text{の逆関数}：x=f(y)\text{を満たす}$$

ものを言います。関数とは一般に「xをとったらyの値がわかる（具体的に一つに定まる）」ものでしたが、逆関数をとれるような関数においてはそれだけでなく、「yの値がわかれば、xの値も特定できる」のでした。

> 以前に**逆関数をとれるような関数は、「上への１対１の関数」に限られる**ということをやっていましたね。深くは取り扱いませんが要確認です[1]。

一般には、$x=f(y)$を$y=(x\text{の式})$に書きなおした形で表します。これが可能であれば逆関数の微分は簡単です。例えば、直線の逆関数の導関数を考えてみましょう。$y=3x+1$の逆関数は$x=3y+1 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$ですね。逆関数の導関数はつまるところ傾きなので$\dfrac{1}{3}$です。

この例のように、xとyを入れかえた後に$y=(x\text{の式})$に直せるような場合であれば微分することも容易ですが、それが出来ない関数も数多くあります。例えば「$y=\sin x$の逆関数を微分せよ」という問題が出たらどうでしょうか[2]。直線の逆関数の導関数のようにして解くことはできません。そこで、今回学習する以下の手法が威力を発揮します。

逆関数の微分

(1) $y=f(x)$のxとyを入れ替える

$$x=f(y)$$

(2) 両辺xで微分する

$$\begin{aligned}1&=\frac{d}{dx}f(y)\\ \Leftrightarrow 1&=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}f(y)\\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}&=\frac{1}{\dfrac{d}{dy}f(y)}\end{aligned}$$

(3) この時点では$\dfrac{dy}{dx}$はyの式で表されているので、(1)の式を使ってxに表し直す

これだけだと何がなんだか、となりそうなので、ここでやっていることを解説しておきます。

この操作の目的意識は、**逆関数f^{-1}の式から元の関数fの式に直し、$\dfrac{dy}{dx}$の情報を取り出す**ことにあります。

まず、f^{-1}の式から元の関数fの式に直しましょう。$y=f^{-1}(x)$とおき、**この両辺を関数fに代入**すると、

$$\begin{aligned} f(y)&=f(f^{-1}(x)) \\ \Leftrightarrow f(y)&=x \end{aligned}$$

より、$x=f(y)$という関数を得ることができます。

$x=f(y)$という式から$\dfrac{dy}{dx}$の情報を引き出せばいいのですが、ここは当然**陰関数微分**です。両辺をxで微分します。

左辺の微分は簡単で1になります。右辺の微分は合成関数の微分法を使って、

$$\frac{d}{dx}f(y)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}f(y)$$

となります。

よって、

$$1=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}f(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{d}{dy}f(y)}$$

となり、$\dfrac{dy}{dx}$が計算できます。ただし、分母の$\dfrac{d}{dy}f(y)$が0になる所ではこの式は使えません。たとえば$y=x^3$の逆関数$y=\sqrt[3]{x}$は、$x=0$（$y=0$で$\dfrac{d}{dy}y^3=0$）でグラフの接線が縦になり、微分できません。きちんと言うと、「fが区間で微分可能で狭義単調、かつ$f'(y)\neq 0$」のとき、逆関数は微分可能で上の式が成り立ちます（だからこそ両辺をxで微分してよい）。

例：$\sin x$ の逆関数

$y=\sin x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$の逆関数は

$$x=\sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たします。両辺をxで微分すると$1=\dfrac{dy}{dx}\cdot\cos y$なので、$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos y}$です。ここで$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$より$\cos y>0$なので、$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$となり、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

が得られます。逆関数そのものを$y=(x$の式$)$の形で書けなくても、その導関数は求まるのがポイントです。(3)でxの式に直すときに、yの範囲から符号（ここでは$\cos y$の正負）を決める所を忘れないようにしましょう。

逆関数の導関数を使う問題

授業で扱った問題[3]では、この方法で逆関数の導関数を求め、それを使って逆関数を多項式で下から評価し、さらに具体的な値を代入して π を評価しました。同じ考え方で解ける問題を1つ挙げます。

問題

$\tan x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ とする。

(1) $f'(x)$ を x の式で表せ。

(2) $x>0$ のとき、$f(x)>x-\dfrac{x^3}{3}$ を示せ。

(3) $\pi>3.07$ を示せ。ただし $1.73<\sqrt{3}<1.74$ を用いてよい。

(1) $y=f(x)$ とおくと $x=\tan y\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ です。両辺を x で微分すると $1=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 y}$ なので

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

です。$\sin x$ のときと違い、$\cos^2 y=\dfrac{1}{1+\tan^2 y}$ には符号の問題が出てきません。

(2) $g(x)=f(x)-\left(x-\dfrac{x^3}{3}\right)$ とおくと、(1)より

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{1}{1+x^2}-1+x^2\\&=\frac{1-(1-x^2)(1+x^2)}{1+x^2}\\&=\frac{x^4}{1+x^2}\end{aligned}$$

です。$x>0$ で $g'(x)>0$ なので $g(x)$ は $x \geqq 0$ で増加し、$g(0)=f(0)=0$ から、$x>0$ で $g(x)>0$ です。

⑶ $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ なので $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ です。⑵に $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を代入すると

$$\frac{\pi}{6}>\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{9\sqrt{3}}=\frac{8}{9\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{27}$$

より $\pi>\dfrac{16\sqrt{3}}{9}>\dfrac{16\times 1.73}{9}=3.075\cdots>3.07$ です。

⑶では、$\tan\dfrac{\pi}{4}=1$ を使って $x=1$ を代入することもできますが、そうすると $\dfrac{\pi}{4}>\dfrac{2}{3}$、つまり $\pi>\dfrac{8}{3}$ しか出てきません。0 に近い値を代入するほど評価の精度がよくなります。その理由はマクローリン展開の記事に書きました。

1　たとえば $y=x^2$ は $x=1$ と $x=-1$ で同じ値をとるので、定義域を $x \geqq 0$ などに制限しないと逆関数をもちません。

2　$y=\arcsin x$ですね知ってますよ、というような人には釈迦に説法ではありますが……。

3　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。
