極座標の弧長と伸開線

発展　高2数学・積分

前半（§1〜§3）では、極座標 $r = f(\theta)$ で表された曲線の長さを扱います。面積を求めるときに使った「細い扇形に切って足す」方法が、長さには通用しません。その理由を図で突き止め、正しい公式を導きます。後半（§4〜§6）では、曲線に巻きつけた糸をほどいたとき、糸の先端が描く曲線（伸開線）を調べます。授業で、この曲線を求める問題を扱いました。

1. 扇形の弧を足すと、長さを少なく見積もる

極座標の曲線が囲む面積は、原点を頂点とする細い扇形に切って足し合わせることで求めました。半径 r、中心角 $\Delta\theta$ の扇形の面積は $\dfrac{1}{2}r^2\Delta\theta$ なので、面積は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int r^2\,d\theta$ です。

同じ発想を長さに持ち込むと、扇形の弧の長さ $r\Delta\theta$ を足して $\displaystyle\int r\,d\theta$ が曲線の長さになりそうに見えます。ところが、この式は一般には正しい長さを与えません。答えを知っている曲線で試してみます。

$r = 2\cos\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の両辺に r を掛けると $x^2 + y^2 = 2x$、すなわち $(x-1)^2 + y^2 = 1$ なので、この曲線は中心 $(1,\,0)$、半径 1 の円です。周の長さは 2π、面積は π と分かっています。

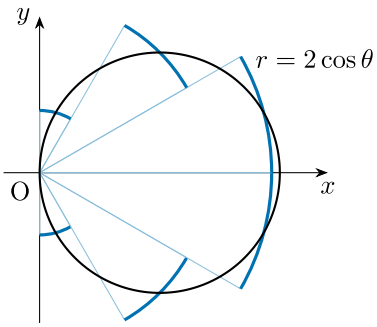


図1　円 $r = 2\cos\theta$ を、原点を頂点とする中心角 $30°$ の扇形6つで覆った図。扇形の弧は円から外れている

扇形で面積を計算すると

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\cos\theta)^2\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \pi$$

となり、正しい値が出ます。一方、扇形の弧を足すと

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\theta\,d\theta = \Big[2\sin\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4$$

となり、本当の長さ $2\pi \fallingdotseq 6.28$ よりかなり小さくなります。図1を見ると、原点の近くでは円がほぼ半径の方向に走っているのに、扇形の弧は半径に垂直な方向にしか進めません。分割を細かくしても、こ

の向きの食い違いは残ります。

授業で扱った問題[1]のカージオイド $r = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ でも同じことが起きます。全長は媒介変数の積分で $8a$ と求めましたが、x 軸についての対称性を使って扇形の弧を足すと

$$2\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\,d\theta = 2a\Big[\theta+\sin\theta\Big]_0^{\pi} = 2\pi a \fallingdotseq 6.28a$$

となり、やはり足りません。

2. 微小な三角形で誤差の大きさを測る

曲線上に、偏角 θ の点 P と偏角 $\theta+\Delta\theta$ の点 Q をとります。P から直線 OQ に下ろした垂線の足を H とします。

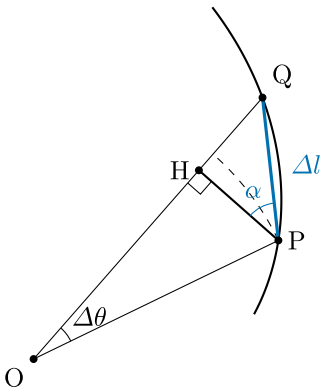


図2　曲線上の2点 P, Q と原点 O。P から OQ に下ろした垂線の足が H、弦 PQ と PH のなす角が α。破線は扇形の弧

直角三角形 PHQ の各辺を $\Delta\theta$ で表します。$\mathrm{OP} = r = f(\theta)$ と書きます。

- $\mathrm{PH} = r\sin\Delta\theta \fallingdotseq r\Delta\theta$。これは扇形の弧の長さとほぼ同じです。
- $\mathrm{OH} = r\cos\Delta\theta \fallingdotseq r$ と、一次近似 $\mathrm{OQ} = f(\theta+\Delta\theta) \fallingdotseq f(\theta) + f'(\theta)\Delta\theta$ から、$\mathrm{HQ} = \mathrm{OQ} - \mathrm{OH} \fallingdotseq r'\Delta\theta$（$r'<0$ なら長さは $|r'|\Delta\theta$）。
- 三平方の定理から、$\mathrm{PQ} = \sqrt{\mathrm{PH}^2+\mathrm{HQ}^2} \fallingdotseq \sqrt{r^2+(r')^2}\,\Delta\theta$。

曲線の微小な長さ Δl は弦 PQ でよく近似されるので、$\Delta l \fallingdotseq \sqrt{r^2+(r')^2}\,\Delta\theta$ です。これを足し集めると、次の公式が得られます。

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$

扇形の弧 $r\Delta\theta$ と本当の長さの比は、弦 PQ と PH のなす角を α として

$$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PQ}} = \cos\alpha \;\longrightarrow\; \frac{r}{\sqrt{r^2+(r')^2}} \qquad (\Delta\theta \to 0)$$

です。$\Delta\theta$ を小さくしても角 α は 0 に近づかず、曲線の向きと半径に垂直な向きとのずれに近づきます。したがって $r' = 0$ となる点（そこで曲線は半径に垂直に進む）以外では比が 1 にならず、どの小片も一定の割合で短く見積もられます。§1 の円では $r^2 + (r')^2 = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4$ なので比は $\cos\theta$ で、扇形の弧の和 4 は、正しい被積分関数 2 に $\cos\theta$ を掛けた $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\theta\, d\theta$ そのものです。

> **面積では誤差が消える理由**
>
> 扇形 OPH と、曲線と2本の半径で囲まれた本当の細片の差は、だいたい直角三角形 PHQ の分です。その面積は $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{PH}\cdot\mathrm{HQ} \fallingdotseq \dfrac{1}{2}r|r'|(\Delta\theta)^2$ で、扇形の面積 $\dfrac{1}{2}r^2\Delta\theta$ に比べて $\Delta\theta$ をもう一つ余分に含みます。比は $\dfrac{|r'|}{r}\Delta\theta$ 程度で、$\Delta\theta \to 0$ で 0 に近づくので、足し合わせても誤差は消えます。長さでは、捨てた辺 HQ が PH と同じく $\Delta\theta$ に比例する大きさをもつので、誤差が割合として残ります。

公式を確かめます。§1 の円では $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{4}\,d\theta = 2\pi$ で、周の長さに一致します。カージオイド $r = a(1+\cos\theta)$ では $r' = -a\sin\theta$ なので

$$\begin{aligned} r^2 + (r')^2 &= a^2\{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\} \\ &= 2a^2(1+\cos\theta) \\ &= 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

です。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ では $\cos\dfrac{\theta}{2} \geqq 0$ なので根号はそのまま外れて、上下の対称性から

$$l = 2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a\Big[\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi} = 8a$$

となり、媒介変数の積分で求めた長さと一致します。

3. 座標に直して導く

§2 は図による説明でした。同じ公式は、媒介変数表示の弧長の公式 $l = \displaystyle\int\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,d\theta$ からも出ます。こちらは近似を使わないので、証明としてはこちらが確実です。

> θ を媒介変数として $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$（$r = f(\theta)$）と見ると、積の微分から

$$x' = r'\cos\theta - r\sin\theta,$$
$$y' = r'\sin\theta + r\cos\theta$$

です。2乗して足すと、rr' を含む項は $-2rr'\sin\theta\cos\theta$ と $+2rr'\sin\theta\cos\theta$ で打ち消し合い、

$$\begin{aligned}(x')^2 + (y')^2 &= (r')^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\\ &= r^2 + (r')^2\end{aligned}$$

が残ります。これを弧長の公式に入れれば $l = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\theta$ です。

4. 伸開線：巻きつけた糸をほどく

平面上の曲線 C に糸を沿わせて巻きつけておき、糸の端を持って、たるませずに引きはがしていきます。このとき糸の端が描く曲線を、C の**伸開線**と呼びます。授業で扱った別の問題（接線の上で、弧の長さと同じ距離だけ接点から離した点の軌跡を求める問題）で求めた曲線は、まさにこの伸開線です。

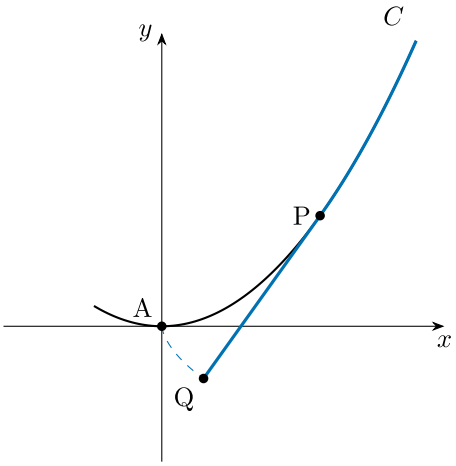


図3　放物線 C に原点 A から巻いた糸を点 P までほどいた図。PQ は接線で、Q の描く曲線（破線）が伸開線

図3は、放物線 $y = \dfrac{x^2}{2}$ の $x \geqq 0$ の部分に、原点 A を端として巻いた糸を、点 P までほどいたところです。太い青が糸で、P から先はまだ曲線に沿っています。破線が、ここまでに端 Q が通った跡です。

座標で書きます。曲線 C を $\mathrm{P}(t) = (x(t), y(t))$ と表し、糸の端ははじめ $\mathrm{A} = \mathrm{P}(t_0)$ にあり、糸は $t \geqq t_0$ の側に巻かれているとします。接点が $\mathrm{P}(t)$ まで来たときの端を Q とします。Q の位置は次の2つの事実で決まります。

1. 糸はぴんと張っているので、ほどけた部分 PQ は線分で、P での C の接線の上にあります。Q は P から見て A の側、つまり速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (x'(t), y'(t))$ と逆の向きにあります。
2. 糸は伸び縮みしないので、PQ の長さは、ほどけた弧 AP の長さ $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{v}(u)|\,du$ に等しくなります。

速度方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{T} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ と書くと、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - s(t)\,\boldsymbol{T}$、成分で書けば次の式です。

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\,du}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

伸開線は糸と直角に交わる

式 $(*)$ を t で微分します。$s'(t) = |\boldsymbol{v}|$ なので $(s\boldsymbol{T})' = |\boldsymbol{v}|\boldsymbol{T} + s\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{v} + s\boldsymbol{T}'$ となり、

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{T}') = -s\,\boldsymbol{T}'$$

です。$|\boldsymbol{T}|^2 = 1$ を微分すると $2\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}' = 0$ なので、$\boldsymbol{T}'$ は $\boldsymbol{T}$ に垂直です。よって Q の速度は糸 PQ の向き $\boldsymbol{T}$ に垂直で、**伸開線の Q での法線は、糸 PQ を含む直線**になります。§6 でこの事実を使います。

5. 伸開線の例

円の伸開線

単位円 $(x,\,y) = (\cos t,\,\sin t)$ を点 $\mathrm{A}(1,\,0)$（$t_0 = 0$）からほどきます。$\boldsymbol{v} = (-\sin t,\,\cos t)$ で $|\boldsymbol{v}| = 1$、$s = t$ なので、式 $(*)$ から

$$(X,\,Y) = (\cos t + t\sin t,\ \sin t - t\cos t)$$

です。原点からの距離の2乗は $X^2 + Y^2 = 1 + t^2$ で、ほどくほど円から遠ざかる渦巻きになります。円の伸開線は円ではありません。

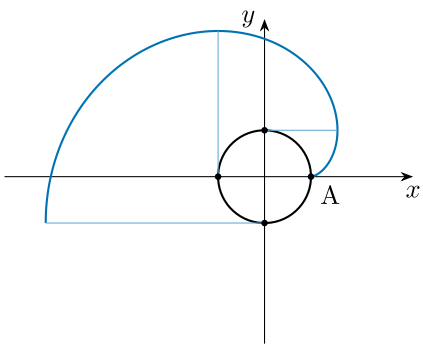


図4　単位円（黒）と、点 A からほどいた伸開線（青）。$t = \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$ のときの糸を細線で示す

サイクロイドの伸開線

半径 1 の円を x 軸に沿って滑らせずに転がすとき、円周に固定した1点の描く曲線が、サイクロイドです。円が角 t だけ回転した時点で、最初に原点に接していた点は

$$(x,\, y) = (t - \sin t,\; 1 - \cos t)$$

にあります。山の頂点 $\mathrm{A}(\pi,\, 2)$（$t_0 = \pi$）から右半分 $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ をほどきます。半角の公式で

$$\boldsymbol{v} = (1 - \cos t,\; \sin t) = 2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2},\; \cos\frac{t}{2}\right)$$

と書けて、この範囲では $\sin\dfrac{t}{2} \geqq 0$ なので $|\boldsymbol{v}| = 2\sin\dfrac{t}{2}$、$\boldsymbol{T} = \left(\sin\dfrac{t}{2},\; \cos\dfrac{t}{2}\right)$ です。ほどいた長さは

$$s = \int_{\pi}^{t} 2\sin\frac{u}{2}\,du = -4\cos\frac{t}{2}$$

なので、

$$\begin{aligned} s\boldsymbol{T} &= -4\cos\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2},\; \cos\frac{t}{2}\right) \\ &= (-2\sin t,\; -2 - 2\cos t) \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} (X,\, Y) &= (t - \sin t + 2\sin t,\; 1 - \cos t + 2 + 2\cos t) \\ &= (t + \sin t,\; 3 + \cos t) \end{aligned}$$

を得ます。$t = u + \pi$（$0 \leqq u \leqq \pi$）と置き直すと

$$(X,\, Y) = (u - \sin u,\; 1 - \cos u) + (\pi,\, 2)$$

で、これはサイクロイドの左半分を $(\pi,\, 2)$ だけ平行移動した曲線です。サイクロイドの伸開線は、合同なサイクロイドになります。

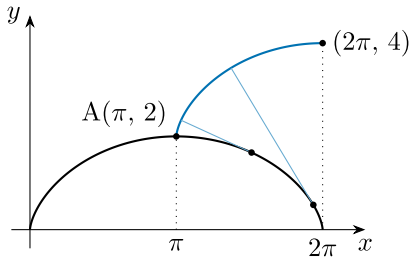


図5　サイクロイド（黒）と、頂点 A から右半分をほどいた伸開線（青）。伸開線は $(\pi,\,2)$ から $(2\pi,\,4)$ までの合同なサイクロイドの弧

カージオイドの伸開線（複素数で計算する）

カージオイドやアステロイドは、複素数平面で $e^{it}=\cos t+i\sin t$ を使うと計算が短くなります。$e^{ia}e^{ib}=e^{i(a+b)}$ と、t で微分すると $\left(e^{ikt}\right)'=ike^{ikt}$ になること（実部と虚部をそれぞれ微分すれば確かめられます）だけを使います。

カージオイドは、単位円に外から接する半径 1 の円を滑らせずに転がしたとき、その円周に固定した1点の描く曲線です。動く円の中心の偏角が t のとき、はじめ $(1,\,0)$ にあった点は

$$z(t)=2e^{it}-e^{2it}\qquad\bigl((x,\,y)=(2\cos t-\cos 2t,\;2\sin t-\sin 2t)\bigr)$$

にあります。$\mathrm{A}=z(\pi)=-3$ から下半分 $\pi\leqq t\leqq 2\pi$ をほどきます。

$$z'(t)=2ie^{it}-2ie^{2it}=2ie^{it}\bigl(1-e^{it}\bigr)$$

で、$1-e^{it}=e^{it/2}\bigl(e^{-it/2}-e^{it/2}\bigr)=-2i\sin\dfrac{t}{2}\,e^{it/2}$ なので

$$z'(t)=4\sin\frac{t}{2}\,e^{3it/2}$$

です。この範囲では $\sin\dfrac{t}{2}\geqq 0$ なので、$|z'|=4\sin\dfrac{t}{2}$、単位ベクトルは $e^{3it/2}$ です。ほどいた長さは $s=\displaystyle\int_{\pi}^{t}4\sin\frac{u}{2}\,du=-8\cos\frac{t}{2}$ で、式 $(*)$ は複素数で $Z=z-s\,e^{3it/2}$ と書けるので

$$\begin{aligned}Z&=2e^{it}-e^{2it}+8\cos\frac{t}{2}\,e^{3it/2}\\&=2e^{it}-e^{2it}+4\bigl(e^{it/2}+e^{-it/2}\bigr)e^{3it/2}\\&=6e^{it}+3e^{2it}\end{aligned}$$

となります。成分では $(X,\,Y)=(6\cos t+3\cos 2t,\;6\sin t+3\sin 2t)$ です。$t=u+\pi$（$0\leqq u\leqq\pi$）と置くと $e^{it}=-e^{iu}$、$e^{2it}=e^{2iu}$ なので

$$
\begin{aligned}
Z &= -6e^{iu} + 3e^{2iu} \\
&= -3\bigl(2e^{iu} - e^{2iu}\bigr) \\
&= -3\,z(u)
\end{aligned}
$$

です。伸開線は、カージオイドの上半分を原点を中心に -3 倍（3 倍に拡大して原点について対称移動）した曲線で、やはりカージオイドの一部です。

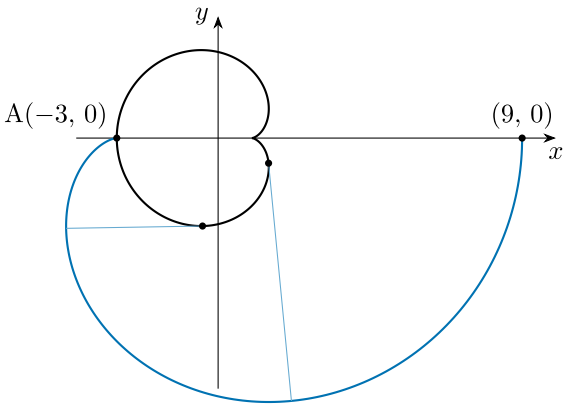


図6　カージオイド（黒）と、$\mathrm{A}(-3,\,0)$ から下半分をほどいた伸開線（青）。伸開線は3倍の大きさの逆向きのカージオイドの弧で、$(9,\,0)$ で終わる

アステロイドの伸開線

アステロイドは、半径 1 の円に内側から接する半径 $\dfrac{1}{4}$ の円を滑らせずに転がしたとき、その円周に固定した1点の描く曲線です。動く円の中心の偏角が t のとき、はじめ $(1,\,0)$ にあった点は

$$
z(t) = \frac{1}{4}\bigl(3e^{it} + e^{-3it}\bigr) \qquad \bigl((x,\,y) = (\cos^3 t,\ \sin^3 t)\bigr)
$$

にあります（3倍角の公式 $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$、$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$ で実部と虚部を確かめられます）。第1象限の弧の真ん中 $\mathrm{A} = z\Bigl(\dfrac{\pi}{4}\Bigr)$ から、$\dfrac{\pi}{4} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分をほどきます。

$$
\begin{aligned}
z'(t) &= \frac{3i}{4}\bigl(e^{it} - e^{-3it}\bigr) \\
&= \frac{3i}{4}e^{-it}\bigl(e^{2it} - e^{-2it}\bigr) \\
&= -\frac{3}{2}\sin 2t\, e^{-it}
\end{aligned}
$$

で、この範囲では $\sin 2t \geqq 0$ なので、$|z'| = \dfrac{3}{2}\sin 2t$、単位ベクトルは $-e^{-it}$ です。ほどいた長さは $s = \displaystyle\int_{\pi/4}^{t} \frac{3}{2}\sin 2u\,du = -\frac{3}{4}\cos 2t$ なので

$$
\begin{aligned}
Z &= z - s\bigl(-e^{-it}\bigr) \\
&= z - \frac{3}{4}\cos 2t\, e^{-it} \\
&= \frac{3}{4}e^{it} + \frac{1}{4}e^{-3it} - \frac{3}{8}\bigl(e^{it} + e^{-3it}\bigr) \\
&= \frac{1}{8}\bigl(3e^{it} - e^{-3it}\bigr)
\end{aligned}
$$

です。成分では

$$
(X,\, Y) = \left(\frac{1}{8}(3\cos t - \cos 3t),\ \frac{1}{8}(3\sin t + \sin 3t)\right)
$$

となります。$t = u + \dfrac{\pi}{4}$ $\left(0 \leqq u \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ と置くと $e^{-3it} = e^{-3iu}e^{-3\pi i/4} = -e^{\pi i/4}e^{-3iu}$ なので

$$
Z = \frac{1}{8}e^{\pi i/4}\bigl(3e^{iu} + e^{-3iu}\bigr) = \frac{1}{2}e^{\pi i/4}\, z(u)
$$

です。伸開線は、アステロイドの $0 \leqq u \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の部分を、原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ 回し、さらに $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮めた曲線です。4本の弧をそれぞれ真ん中からほどくと、全体として、回転して半分に縮めたアステロイドが現れます。

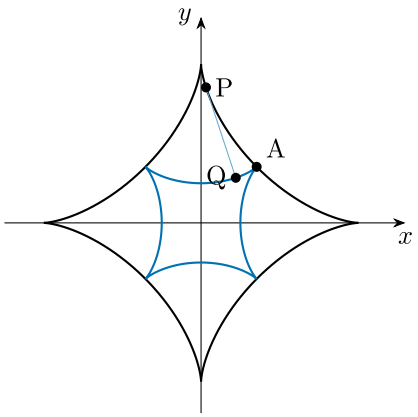


図7　アステロイド（黒）と、4本の弧をそれぞれ真ん中からほどいた伸開線（青）。青は黒を $\frac{\pi}{4}$ 回して $\frac{1}{2}$ 倍にしたアステロイド。点 P から点 Q への糸を1本示す

一般のエピサイクロイド・ハイポサイクロイド

固定した円の外側を円が転がるときの軌跡を**エピサイクロイド**、内側を転がるときの軌跡を**ハイポサイクロイド**と呼びます。固定した円の半径が転がる円の n 倍のとき（n は正の整数。ハイポサイクロイドでは $n \geqq 3$）、どちらも尖った点（尖点）を n 個もちます。$n = 1$ のエピサイクロイドがカージオイド、$n = 4$ のハイポサイクロイドがアステロイドです。

上の2つと同じ計算をすると、尖点と尖点の間の弧をその真ん中からほどいた伸開線は、どちらも元と相似な曲線の一部になります。

	回転角	倍率	例
エピサイクロイド	$\dfrac{\pi}{n}$	$\dfrac{n+2}{n}$	カージオイド（$n=1$）：π 回して 3 倍＝-3 倍
ハイポサイクロイド	$\dfrac{\pi}{n}$	$\dfrac{n-2}{n}$	アステロイド（$n=4$）：$\dfrac{\pi}{4}$ 回して $\dfrac{1}{2}$ 倍

相似にならない例：カテナリーとトラクトリクス

ここまでの3つは元の曲線と相似な伸開線をもちましたが、これは特別な性質です。円の伸開線が渦巻きになったように、一般には形が変わります。もう一つの例として、ロープの両端を持って垂らしたときの形であるカテナリー（懸垂線）

$$y = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

を、頂点 $\mathrm{A}(0,\,1)$ から左右へほどきます。$\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$、$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ と書くと、$(\cosh x)' = \sinh x$、$1 + \sinh^{2} x = \cosh^{2} x$ なので、x を媒介変数として $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{1 + \sinh^{2} x} = \cosh x$、ほどいた長さは $s = \displaystyle\int_{0}^{x} \cosh u \, du = \sinh x$ です。式 $(*)$ に入れると

$$\begin{aligned} (X,\,Y) &= (x,\,\cosh x) - \frac{\sinh x}{\cosh x}(1,\,\sinh x) \\ &= \left(x - \tanh x,\; \frac{1}{\cosh x} \right) \end{aligned}$$

となります（$\cosh x - \dfrac{\sinh^{2} x}{\cosh x} = \dfrac{1}{\cosh x}$）。この曲線は**トラクトリクス**（追跡線）と呼ばれ、「各点で接線を x 軸まで延ばすと、その線分の長さがいつも 1」という性質をもちます。長さ 1 の綱で、x 軸の上を進む人に引きずられていく物の跡がこの形です。

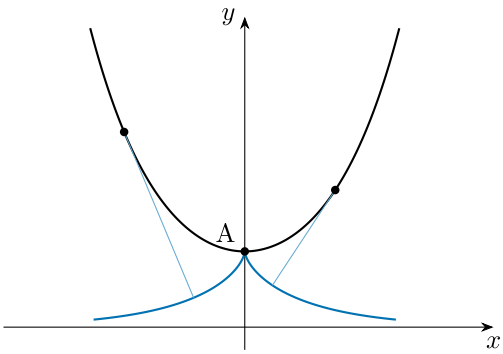


図8　カテナリー $y = \cosh x$（黒）と、頂点 A から左右へほどいた伸開線であるトラクトリクス（青）。$x = 1.2$ と $x = -1.6$ のときの糸を細線で示す

6. 縮閉線

曲線 D が曲線 C の伸開線であるとき、C を D の**縮閉線**と呼びます。たとえば円は、その伸開線（§5 の渦巻き）の縮閉線です。縮閉線には次の2つの性質があります。

1. C は、D の法線をすべて集めたときに、それらに接する曲線（法線の**包絡線**）である。
2. C は、D の各点での曲率円の中心が描く軌跡である。

1 は §4 の結果から直接分かります。D の点 Q での法線は糸 PQ を含む直線で、この直線は P で C に接しています。

2 は、曲率円の中心が「法線上で、曲率半径だけ離れた点」であることから分かります。曲率半径は、曲線の向きが単位長さあたりにどれだけ回るかの逆数です。Q が $|-s\boldsymbol{T}'|\,dt = s|\boldsymbol{T}'|\,dt$ だけ進む間に、Q での進む向き（$\boldsymbol{T}$ に垂直）は $\boldsymbol{T}$ と同じ角 $|\boldsymbol{T}'|\,dt$ だけ回ります。したがって D の Q での曲率半径は $\dfrac{s|\boldsymbol{T}'|}{|\boldsymbol{T}'|} = s = \mathrm{PQ}$ で、曲率円の中心は法線 PQ 上で Q から s だけ離れた点、すなわち P です。曲率円と曲率半径の詳しい扱いは、曲率円の記事を見てください。

1　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。