King Property

発展　高2数学・積分

授業で扱った問題[1]では $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\cos^2 x}\,dx$ を求めるものでした。被積分関数の原始関数は高校の範囲では書けませんが、誘導どおり $x=\pi-t$ と置き換えると右辺に同じ積分がもう一度現れ、それを I とおいて I の1次方程式を解けば値が出ました。

この置換は、区間の左端と右端を入れ替えるものです。こうした置換をいつでも使える形にまとめたものは、英語圏で**King Property**（キング・プロパティ）と呼ばれています。この頁では、まずその式がグラフの上で何を言っているのかを確かめ、次にどういう積分なら値が出せるのかを見ます。

1. 区間の中央でグラフを裏返す

区間 $[a,b]$ の中央は $x=\dfrac{a+b}{2}$ です。グラフ $y=f(x)$ をこの縦の直線を軸にして左右に裏返す（線対称に移す）と、どんな式のグラフになるでしょうか。

$y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\,(p,\ f(p))$ を考えます。裏返しても高さは変わらず、x 座標だけが軸の反対側へ移ります。移った先の x 座標を q とすると、p と q の真ん中が軸なので $\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{a+b}{2}$、つまり $q=a+b-p$ です。したがって移った点は $\mathrm{P}'\,(a+b-p,\ f(p))$ になります。

この P' が乗っている曲線の式は、$x=a+b-p$ のとき $y=f(p)$ になるものです。$p=a+b-x$ と書き直せば $y=f(a+b-x)$ となります。

> **裏返したグラフの式**
>
> $y=f(x)$ のグラフを直線 $x=\dfrac{a+b}{2}$ に関して線対称に移すと、$y=f(a+b-x)$ のグラフになる。とくに $a=0$ のとき（直線 $x=\dfrac{b}{2}$ が軸）は $y=f(b-x)$。

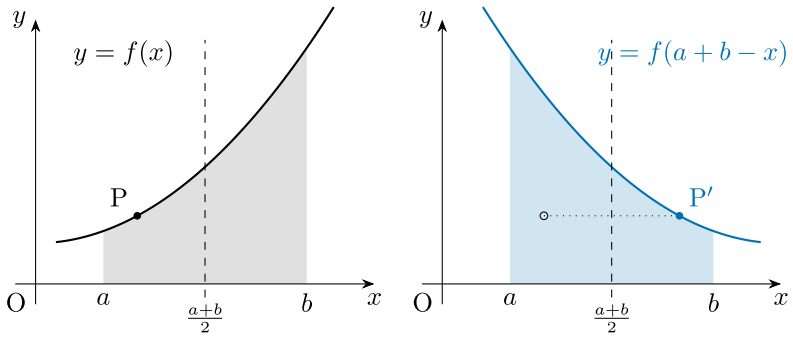


図1　左の $y=f(x)$ を点線の軸 $x=\frac{a+b}{2}$ で裏返すと右の $y=f(a+b-x)$ になり、点 P は P' に移る。右の白丸は P があった位置。色をつけた部分の面積は左右で同じ

裏返すと $x=a$ の真上にあった部分は $x=b$ の真上へ、$x=b$ の真上にあった部分は $x=a$ の真上へ移ります。区間 $[a,b]$ の中身はそっくり入れ替わるだけで、区間からはみ出す部分も新しく入ってくる部分もありません。図形を鏡に映しても面積は変わらないので、図1の左右の色のついた部分の面積は等しくなります。

2. 定理と置換による証明

図で見た事実を式で書いたものが次の定理です。$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続とします（面積として見たのは $f(x)\geqq 0$ の場合ですが、式としては符号に関係なく成り立ちます）。

King Property

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

とくに区間が $[0,a]$ のときは

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$$

証明

右辺の積分で $t=a+b-x$ とおきます。$\dfrac{dt}{dx}=-1$ なので $dx=-dt$ です。x が a から b まで動くと、t は b から a まで動きます。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(a+b-x)\,dx&=\int_b^a f(t)\,(-dt)\\&=\int_a^b f(t)\,dt\end{aligned}$$

定積分の値は積分変数の文字によらないので、最後の式は $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と同じです。 □

置換で積分の向きが逆になり、$dx=-dt$ のマイナスでもう一度逆になるので、結局もとの向きの積分に戻ります。図1で左右を入れ替えても面積が変わらないことを、計算の側から見るとこうなります。

3. 足して 2 で割る

定理の左辺と右辺は同じ値 I です。2つの等しい数を足して 2 で割っても、その値は変わりません。そこで

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \bigl\{f(x) + f(a+b-x)\bigr\}\,dx
\end{aligned}
$$

と書けます。この等式自体はどんな連続関数でも成り立ちます。ただし、これで計算が楽になるとは限りません。右辺の被積分関数 $f(x)+f(a+b-x)$ が、もとの $f(x)$ より積分しやすい形になったときだけ役に立ちます。

得をしない例　$\displaystyle\int_0^2 x^3\,dx$ に使うと、被積分関数は $x^3+(2-x)^3 = 6x^2-12x+8$ になります。$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^2 (6x^2-12x+8)\,dx = 4$ で値は合いますが、もとの $\dfrac{2^4}{4}=4$ を直接出すほうが短く済みます。

得をする例　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ を考えます。分母があるので、このままでは原始関数を見つけにくい形です。$f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ とおくと、$\sin\!\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$、$\cos\!\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ より

$$
f\!\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}
$$

です。分母が同じなので、足すと

$$
f(x)+f\!\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x} = 1
$$

となります。したがって

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{4}
$$

です。

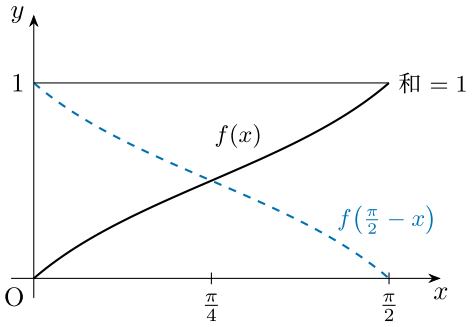


図2　実線が $f(x)$、点線が裏返した $f\!\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$。どの x でも縦に足すと 1 になる

> **使う前に確かめること**
>
> いきなり式変形を始めず、まず余白で $f(x)+f(a+b-x)$ を計算してみます。定数になる、分母が消える、原始関数の分かる形になる、のどれかなら King Property で値が出せます。どれにもならなければ別の方法を考えます。

4. 授業で扱った問題に当てはめる

授業で扱った問題を、誘導の置換を見ずにこの方法でやってみます。区間は $[0,\pi]$ なので、$f(x)=\dfrac{x\sin x}{3+\cos^2 x}$ に対して $f(\pi-x)$ を作ります。$\sin(\pi-x)=\sin x$、$\cos(\pi-x)=-\cos x$ を使うと

$$\begin{aligned} f(\pi-x) &= \frac{(\pi-x)\sin x}{3+(-\cos x)^2} \\ &= \frac{(\pi-x)\sin x}{3+\cos^2 x} \end{aligned}$$

です。分母も $\sin x$ も共通なので、足すと分子の x と $\pi-x$ がまとまり

$$f(x)+f(\pi-x)=\frac{\pi\sin x}{3+\cos^2 x}$$

になります。もとの式で積分を難しくしていた因数 x が消えています。

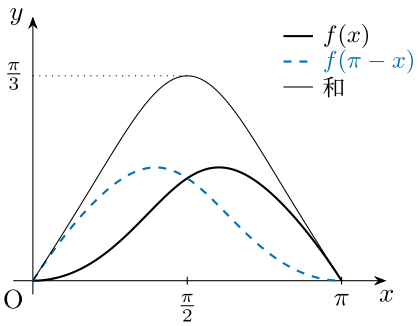


図3　$f(x)=\frac{x\sin x}{3+\cos^2 x}$（太い実線）と、それを裏返した $f(\pi-x)$（点線）。2つの和 $\frac{\pi\sin x}{3+\cos^2 x}$（細い実線）は $x=\frac{\pi}{2}$ に関して左右対称で、$x=\frac{\pi}{2}$ で最大値 $\frac{\pi}{3}$ をとる

したがって

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{3+\cos^2 x}\,dx$$

です。ここで $u=\cos x$ とおくと $du=-\sin x\,dx$ で、$x:0\to\pi$ のとき $u:1\to-1$ なので

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{du}{3+u^2}$$

となります。$u = \sqrt{3}\tan\theta$ とおくと $du = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$、$3+u^2 = \dfrac{3}{\cos^2\theta}$ で、$u:-1\to 1$ のとき $\theta:-\dfrac{\pi}{6}\to\dfrac{\pi}{6}$ なので

$$\int_{-1}^{1}\frac{du}{3+u^2} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{3}}\,d\theta = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

です。よって $I = \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi^2}{18}$ です。

log の積分と組み合わせる

被積分関数が $f(x) = \log g(x)$ の形なら、足し算は log の中の掛け算に変わります。積分区間で $g(x)>0$ のとき

$$f(x)+f(a+b-x) = \log\bigl\{g(x)\,g(a+b-x)\bigr\}$$

なので、積 $g(x)\,g(a+b-x)$ が定数になれば、和は定数の log になって積分できます。

この形の代表が $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)\,dx$ です。区間 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ で $1+\tan x>0$ です。加法定理から $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) = \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$ なので

$$1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{(1+\tan x)+(1-\tan x)}{1+\tan x} = \frac{2}{1+\tan x}$$

となり、$(1+\tan x)\left\{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right\} = 2$ です。よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log 2\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$$

が得られます。逆に、裏返した相手との積が定数になる g を先に決めておけば、この方法で値の出る積分を自分で作ることもできます。

1　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。