# 等高線とラグランジュの未定乗数法

**解説プリント「$f(x,y)=k$ とおいて動かすと、なぜ最大・最小が求まるのか」の詳説（大学教養レベル）　｜　等高線・偏微分と勾配・境界で接する理由・未定乗数法**

本編の解説プリントでは、領域 $R$ と図形 $f(x,y)=k$ が共有点をもつような $k$ の全体が、$R$ の上で $f(x,y)$ が取る値の全体になることを確かめた。そして、等位線 $f(x,y)=k$ が領域の頂点を通るときか境界に接するときに最大値・最小値が現れるので、両方を候補に挙げて値を比べる、と結んだ。この詳説では本編で答えなかった問いを二つ扱う。

1. 境界のなめらかな部分で最大・最小になるとき、等位線がそこで境界に**接する**のはなぜか。
2. 接する点を、図を描かずに**計算だけで**見つけるにはどうすればよいか。

二つ目の答えが、大学 1 年で習う**ラグランジュの未定乗数法**である。使う道具は多項式の微分（$x^n$ を微分すると $nx^{n-1}$、微分係数はグラフの接線の傾き）と、図形と式で習った直線の傾き・垂直の条件だけである。ただし途中で大学の数学を前提として借りる箇所が三つあり、借りた箇所ではそう明記する（最後の節に一覧がある）。計算と図の座標はすべて計算機で照合した[*1]。

## 1. 等位線は地図の等高線

本編では、平面のどの点にも $f(x,y)$ の値が 1 つずつ書き込まれていると考えた。この値を**高さ**だと思うと、話が立体になる。平面を水平な床に置き、床の点 $(x,y)$ の真上に高さ $f(x,y)$ の点を立てる。$(x,y)$ を床全体で動かすと、立てた点は空間の中に 1 枚の曲面を作る。これを $z=f(x,y)$ **のグラフ**という（高さの向きに $z$ 軸をとる）。1 変数の関数 $y=f(x)$ のグラフが曲線になるのに対し、2 変数の関数のグラフは曲面になる。

この曲面を**地形**と見ると、本編の等位線 $f(x,y)=k$ は「高さがちょうど $k$ の点を床に写したもの」になる。これは地図の**等高線**と同じものである。地図は山を真上から見た図で、標高 100 m、200 m、… の点をそれぞれ線でつないで描く。本編で述べた「値の違う等位線ははじめから全部そこにある」は、地図に等高線が全部描き込まれていることにあたる。

この見方で本編の原理を言い直すと次のようになる。

> $R$ の上で $f(x,y)$ の最大値を求める $\iff$ $R$ の真上にある地形のうち、いちばん高い地点を探す

最大値は「$R$ と交わる等高線のうち、いちばん高いもの」の高さである。

$f(x,y)=x^2+y^2$ のグラフは、原点の真上が高さ 0 で、原点から離れるほど高くなるお椀の形をしている。高さ $k$ で水平に切った切り口は半径 $\sqrt{k}$ の円で、これが等高線になる（図 1）。

[*1] Python の数式処理ライブラリ sympy で書いた検算に、偏微分・一次近似・例題と練習の答え・未定乗数 $\lambda$ の値・図に描いた接点や半径を入れ、121 項目がすべて一致することを確かめた。

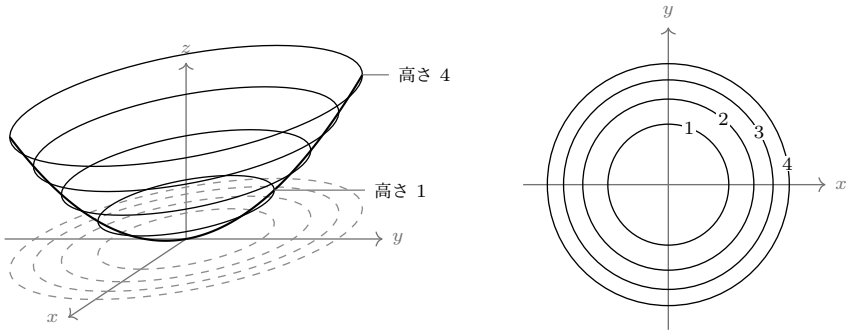



図 1：$z = x^2 + y^2$ のグラフ（左）と、それを真上から見た等高線の地図（右）。数字は高さ $k$。

右の地図では、外側ほど等高線の間隔が狭い（半径 $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2$ の差は $0.41,\ 0.32,\ 0.27$ と縮む）。地図と同じく、**等高線が密なところは斜面が急**である。お椀は外側ほど急に立ち上がっている。本編の問題 1[*2]の $f(x, y) = x + 3y$ のグラフは傾いた平らな板（斜面）で、等高線は平行な直線、$k$ を等間隔に選べば等高線の間隔も等しい。傾きが場所によらず一定の坂である。

## 2. 最大・最小はどこで起こるか

---

$R$ の点を三種類に分けて、それぞれ最大値を与えうるかを考える。$R$ は円や多角形のように、なめらかな曲線や線分で囲まれた範囲とする。

- **内部の点**：境界上にない点。まわりのどの向きにも少しなら動ける。
- **境界のなめらかな部分の点**：境界が折れ曲がっていない所。境界に沿って両側へ動ける。
- **角の点**：多角形の頂点のように、境界が折れ曲がっている所。

**内部の点で最大になるには**、そこが周囲のどこより高い「山頂」か、平らな場所でなければならない。少しでも上り坂の向きがあれば、その向きに動けば高くなるからである。$f(x, y) = x + 3y$ の斜面にはどこにも山頂がないので、最大値は必ず境界でとる。本編の問題 1 で最大値が三角形の頂点に現れたのはこのためである。

**境界のなめらかな部分の点では**、等高線が境界と**交わる**か**接する**かで話が分かれる。図 2 は、円板 $x^2 + y^2 \leqq 1$ を $R$、$f(x, y) = y$（北へ行くほど高い斜面）としたものである。等高線は水平な直線 $y = k$ になる。

[*2] 塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えた。

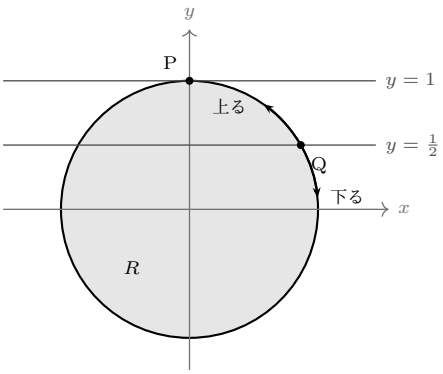



図 2：等高線 $y = \frac{1}{2}$ は円と点 Q で交わり、$y = 1$ は点 P で接する。

点 Q では等高線 $y = \frac{1}{2}$ が円を横切っている。円に沿って Q から反時計回りに動くと等高線の上側に入って値が増え、時計回りに動くと下側に入って値が減る。円周上の点は $R$ の点なので、Q より値の大きい $R$ の点が Q のすぐ隣にあり、Q は最大値を与えない。同じ理由で最小値も与えない。一方、点 P では等高線 $y = 1$ が円に接していて、円に沿ってどちらへ動いても等高線の下側に入る。円の上での $y$ の最大値 1 は P でとる。

**境界のなめらかな部分で最大・最小になる点**

境界のなめらかな部分の点で $f$ が最大（または最小）になるなら、その点を通る等高線は境界に接している。

**角の点では**この議論が使えない。境界が折れ曲がっているので、等高線が境界を横切っていても、境界に沿って動ける向きが両方とも下りになることがある。本編の問題 1 の頂点 $(1, 2)$ がその例である。だから角の点は、接するかどうかに関係なく候補に入れる。

以上で「頂点か接点を候補にする」という本編の結論の理由が分かった。ただし「交わるなら片側で値が増える」と書いたとき、等高線のすぐ上側で値が $k$ より大きいことを当然としていた。山頂や峠のように斜面が平らになる所ではこれが成り立たない。この点を正確に扱い、さらに接点を計算で求めるために、斜面の傾きを数で表す道具を用意する。

## 3. 偏微分と勾配：斜面の傾きを数で表す

---

### 偏微分

$f(x, y)$ の文字 $y$ を定数とみなし、$x$ だけの関数として微分したものを、$f$ の $x$ **についての偏微分**といい $f_x$ と書く。同じように $x$ を定数とみなして $y$ で微分したものを $f_y$ と書く。大学の本では $\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ とも書き、$\partial$ は「ラウンド」や「デル」と読む。「偏」は、変数が二つあるうちの片方に偏って微分する、という意味である。

**偏微分の計算**

$f(x,y)=x^2+3xy+y^3$ のとき、$y$ を定数とみると $3xy$ は「$3y$ 倍の $x$」、$y^3$ は定数なので

$$f_x=2x+3y,\qquad f_y=3x+3y^2.$$

$f(x,y)=x^2+y^2$ なら $f_x=2x$、$f_y=2y$。$f(x,y)=x+3y$ なら $f_x=1$、$f_y=3$。

$f_x$ の意味は、1 変数のときの微分係数と同じく傾きである。点 $(a,b)$ から $y$ を変えずに $x$ の正の向き（東）へ進むとき、地形の断面は $x$ だけの関数 $f(x,b)$ のグラフになり、その接線の傾きが $f_x(a,b)$ である。$f_y(a,b)$ は北へ進むときの傾きである。

## 一次近似

東でも北でもない向きに進むときの高さの変化は、$f_x$ と $f_y$ から組み立てられる。$f$ が多項式なら、次が成り立つ。

**一次近似（多項式の場合）**

点 $(a,b)$ から $(a+h,\ b+k)$ へ動くとき

$$f(a+h,\ b+k)=f(a,b)+f_x(a,b)\,h+f_y(a,b)\,k+\bigl(h,\,k\text{ について }2\text{ 次以上の項}\bigr).$$

**理由.** 多項式は $x^my^n$ の形の項の和なので、1 つの項 $x^my^n$ で確かめればよい。二項定理で展開すると

$$(a+h)^m(b+k)^n=\bigl(a^m+ma^{m-1}h+\cdots\bigr)\bigl(b^n+nb^{n-1}k+\cdots\bigr)=a^mb^n+ma^{m-1}b^n\,h+na^mb^{n-1}\,k+\cdots$$

で、「$\cdots$」は $h^2,\ hk,\ k^2$ 以上の項である。$h,\,k$ の 1 次の係数 $ma^{m-1}b^n$ と $na^mb^{n-1}$ は、$x^my^n$ の偏微分 $mx^{m-1}y^n$、$nx^my^{n-1}$ に $(a,b)$ を代入したものにちょうど一致する。 ■

たとえば $f(x,y)=x^2+3xy+y^3$ を $(1,1)$ のまわりで展開すると

$$f(1+h,\ 1+k)=5+5h+6k+\bigl(h^2+3hk+3k^2+k^3\bigr)$$

で、$f(1,1)=5$、$f_x(1,1)=5$、$f_y(1,1)=6$ が確かに並ぶ。$h=0.01$、$k=0.02$ とすると、1 次の部分は $5h+6k=0.17$、かっこの中は $0.001908$ で、実際の変化 $0.171908$ のほとんどを 1 次の部分が占める。$h,\,k$ が小さいほど 2 次以上の項は 1 次の部分に比べて小さくなるので、短い移動では

$$(\text{高さの変化})\fallingdotseq f_x\,h+f_y\,k$$

と考えてよい。「小さくなる」をきちんと述べるには極限の言葉が必要で、それは大学で扱う（借りる箇所その 1）。多項式でない関数でも、なめらかなら同じ式が成り立つことも大学で示す。

## 勾配

二つの偏微分を組にした矢印 $(f_x,\ f_y)$ を、$f$ の**勾配**といい $\nabla f$ と書く（$\nabla$ は「ナブラ」と読む。$\operatorname{grad} f$ とも書く）。点ごとに矢印が 1 本決まり、点 $(a,b)$ での勾配は、始点を $(a,b)$ に置いて $x$ 方向に $f_x(a,b)$、$y$ 方向に $f_y(a,b)$ だけ進んだ点を終点とする矢印である。勾配には次の三つの性質がある。

**勾配の性質（$\nabla f \neq (0,0)$ の点で）**

1. 勾配は、その点を通る**等高線に垂直**である。
2. 勾配の向きに少し進むと、$f$ の値は**増える**。逆向きに進むと減る。
3. 同じ距離だけ進むとき、値がいちばん大きく増えるのは勾配の向きで、勾配の長さ $\sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ が**斜面の急さ**を表す。

**1 の理由.** 等高線に沿って $(h,k)$ だけ動いても高さは変わらないので、一次近似から $f_x\,h + f_y\,k \fallingdotseq 0$ である。等高線の向きは、短い移動 $(h,k)$ を限りなく短くしたときの向きなので、$f_x\,h + f_y\,k = 0$ を満たす。一方、向き $(h,k)$ と向き $(p,q)$ について、傾き $\dfrac{k}{h}$ と $\dfrac{q}{p}$ の積が $-1$ になる条件を分母を払って書き直すと $ph + qk = 0$ になる（$h = 0$ や $p = 0$ のときも、垂直の条件はこの形のまま成り立つ）。$(p,q) = (f_x, f_y)$ とおけば、等高線の向きと勾配が垂直であることが分かる。

**2 の理由.** 勾配の向きに $(h,k) = (tf_x,\ tf_y)$（$t$ は小さい正の数）だけ進むと、変化は $f_x \cdot tf_x + f_y \cdot tf_y = t\big(f_x^2 + f_y^2\big) > 0$ である。

**3 の理由.** 長さ $r$ の移動（$h^2 + k^2 = r^2$）での変化 $f_x\,h + f_y\,k$ を、コーシー＝シュワルツの不等式で上から抑える。恒等式

$$\big(f_x^2 + f_y^2\big)\big(h^2 + k^2\big) - \big(f_x\,h + f_y\,k\big)^2 = \big(f_x\,k - f_y\,h\big)^2 \geqq 0$$

から $f_x\,h + f_y\,k \leqq \sqrt{f_x^2 + f_y^2}\,r$ で、等号は $f_x\,k = f_y\,h$、つまり $(h,k)$ が勾配と同じ向きのときに限る。だから同じ距離なら勾配の向きがいちばん上り、その上り幅は勾配の長さに比例する。 ■

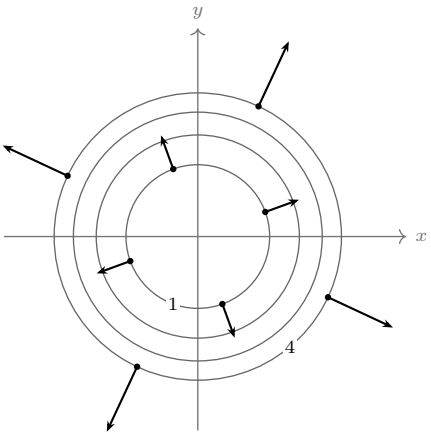



図 3：$f(x,y) = x^2 + y^2$ の等高線（高さ $1, 2, 3, 4$）と勾配 $\nabla f = (2x,\ 2y)$。矢印は長さを $\frac{1}{4}$ に縮めて描いた。

図 3 で、勾配はどれも原点から外へ向かい（上り坂の向き）、円の等高線に垂直である。外側の円の上の矢印は内側の 2 倍の長さで、等高線が外ほど密になっていることと対応している。

## 内部の点で最大・最小になる条件

勾配の性質 2 から、$R$ の内部の点で $\nabla f \neq (0,0)$ なら、勾配の向きへ進めば値が増え、逆へ進めば減る。内部の点はどの向きにも少し動けるので、そこは最大にも最小にもならない。

**内部の点の条件**

$R$ の内部の点で $f$ が最大（または最小）になるなら、そこで $f_x = 0$ かつ $f_y = 0$、つまり $\nabla f = (0,0)$。

これは 1 変数の「極値をとる点では $f'(x) = 0$」の 2 変数版である。逆は成り立たない。$f(x,y) = xy$ では $f_x = y$、$f_y = x$ なので原点で $\nabla f = (0,0)$ になるが、直線 $y = x$ に沿えば $f = x^2 \geqq 0$、直線 $y = -x$ に沿えば $f = -x^2 \leqq 0$ で、原点はある向きには谷底、別の向きには尾根になっている。山道の**峠**と同じ形で、数学では**鞍点**（馬の鞍の形）という。

## 4. 接する＝勾配が平行：ラグランジュの未定乗数法

---

境界の話に戻る。境界のなめらかな部分が、ある多項式 $g$ を使って方程式 $g(x,y) = 0$ で表されているとし、この曲線を $C$ とよぶ。円 $x^2 + y^2 = 1$ なら $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$、直線 $3x + 4y = 12$ なら $g(x,y) = 3x + 4y - 12$ である。

$C$ は「$g$ の高さが 0 の等高線」でもある。だから勾配の性質 1 を $g$ に使うと、$\nabla g$ **は** $C$ **に垂直**である。一方、$C$ 上の点 P で $f$ が最大になるなら、第 2 節により P を通る $f$ の等高線は $C$ に接する。接するとは、P で二つの曲線が同じ接線をもつことである。$\nabla f$ は $f$ の等高線に垂直、$\nabla g$ は $C$ に垂直で、二つの曲線の接線が共通なので、$\nabla f$ と $\nabla g$ はどちらも同じ直線に垂直になり、**互いに平行**になる。これを式で書いたものが次の定理である。

**ラグランジュの未定乗数法**

曲線 $C:\ g(x,y) = 0$ の上で $f(x,y)$ が点 P において最大（または最小）になり、P で $\nabla g \neq (0,0)$ ならば、ある実数 $\lambda$ があって

$$f_x = \lambda\, g_x, \qquad f_y = \lambda\, g_y \qquad (\text{P での値})$$

が成り立つ。$\lambda$（ラムダ）を**ラグランジュの未定乗数**という。

**理由.** P での $C$ の接線の向きを $(h,k)$ とする。勾配の性質 1 を $g$ に使って $g_x\, h + g_y\, k = 0$ である。もし $f_x\, h + f_y\, k \neq 0$ なら、$C$ に沿って P から接線の向きへ少し進むと、一次近似により $f$ の値は $f_x\, h + f_y\, k$ に比例して変わり、逆向きに進むと反対に変わる。どちらか一方は値が増えるので P は最大値を与えない。よって最大値（最小値）を与える P では $f_x\, h + f_y\, k = 0$ で、$\nabla f$ も $\nabla g$ も向き $(h,k)$ に垂直である。$\nabla g \neq (0,0)$ なので、$(h,k)$ に垂直な矢印は $\nabla g$ の何倍かとして表せる。その倍率が $\lambda$ である。 ■

この理由のなかで、「$\nabla g \neq (0,0)$ の点の近くでは、$C$ は途切れずに続くなめらかな曲線で、接線の向きに沿ってたどれる」ことと、「接線そのものでなく曲線に沿って進んでも、値の変化は一次近似で読める」ことを当然としている。前者は**陰関数定理**という大学の定理で保証される（借りる箇所その 2）。

**使うときは**、未知数 $x,\ y,\ \lambda$ についての 3 本の方程式

$$f_x = \lambda\, g_x, \qquad f_y = \lambda\, g_y, \qquad g(x,y) = 0$$

を連立して解く。$\lambda$ は最後の答えには現れない補助の未知数で、「乗数」は $\nabla g$ に掛ける数の意味、「未定」は前もって分からない数の意味である。$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$ とおくと、上の 3 本は $L$

を $x,\ y,\ \lambda$ のそれぞれで偏微分して 0 とおいた式になるので、大学の本ではこの形で書くことも多い。

**絵との対応**を確かめておく。本編で「等位線を動かして、境界に接するところを探す」と言っていた操作を、$\nabla f$ と $\nabla g$ が平行になる点を探す計算に置き換えたものが未定乗数法である。

## 5. 例題で使う

---

**例 1** オリジナル

$x^2+y^2=1$ のとき、$3x+4y$ の最大値と最小値を求めよ。

**解.** $f=3x+4y$、$g=x^2+y^2-1$ とおく。$\nabla f=(3,4)$、$\nabla g=(2x,2y)$ なので、方程式は

$$3=2\lambda x,\qquad 4=2\lambda y,\qquad x^2+y^2=1.$$

$\lambda=0$ だと $3=0$ になるので $\lambda\neq 0$。$x=\dfrac{3}{2\lambda}$、$y=\dfrac{2}{\lambda}$ を 3 本目に入れると $\dfrac{25}{4\lambda^2}=1$、$\lambda=\pm\dfrac{5}{2}$。

- $\lambda=\dfrac{5}{2}$ のとき $(x,y)=\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$、$3x+4y=5$。
- $\lambda=-\dfrac{5}{2}$ のとき $(x,y)=\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$、$3x+4y=-5$。

円周には角がなく、どの点でも $\nabla g\neq(0,0)$（$\nabla g=(0,0)$ は原点だけで、原点は円周上にない）。円周のように閉じていて有界な図形の上では、多項式は必ず最大値と最小値をもつ（借りる箇所その 3）。それらは上の候補のどれかでとるので、**最大値** 5（$x=\frac{3}{5},\ y=\frac{4}{5}$）、**最小値** $-5$（$x=-\frac{3}{5},\ y=-\frac{4}{5}$）。

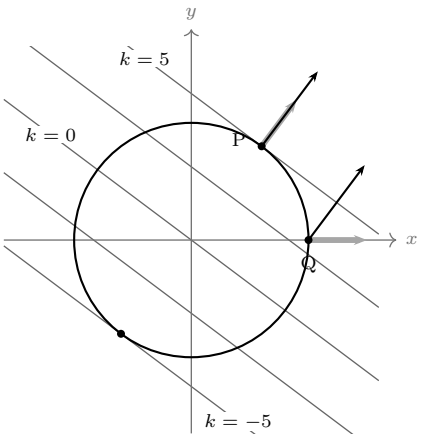



図 4：例 1。直線は等高線 $3x+4y=k$（$k=-5,\ -2.5,\ 0,\ 2.5,\ 5$）。黒い矢印が $\nabla f$、灰の太い矢印が $\nabla g$。接点 P では二つが平行、等高線が円を横切る点 Q では平行でない。

例 1 は、ほかに二通りの解き方がある。どちらも中学・高校の範囲で解け、未定乗数法と同じ構造が見える。

- **本編の方法**：直線 $3x+4y=k$ が円と共有点をもつ条件は、原点との距離 $\dfrac{|k|}{5}$ が 1 以下になることで、$-5\leqq k\leqq 5$。両端は直線が円に接するときである。
- **コーシー＝シュワルツの不等式**：$(3x+4y)^2\leqq(3^2+4^2)(x^2+y^2)=25$ より $-5\leqq 3x+4y\leqq 5$。

等号は $4x-3y=0$、つまり点 $(x,y)$ の向きが $(3,4)$ と平行なときに成り立つ。$\nabla f=(3,4)$、$\nabla g=(2x,2y)$ なので、この等号の条件は「$\nabla f$ と $\nabla g$ が平行」と同じ内容である。

次の 2 題は本編の問題 1・2 の解き直しである。領域の端（境界と頂点）を候補として全部調べ、本編と同じ答えになることを確かめる。

**例 2** 出典 本編の問題 1 の解き直し

$f(x,y)=x+3y$、$R$ は頂点 $(1,2)$、$(2,-1)$、$(-2,0)$ の三角形（周と内部）。$f$ の最大値と最小値を求めよ。

**内部.** $\nabla f=(1,3)$ はどこでも $(0,0)$ でないので、内部の点は候補にならない。

**辺.** 三つの辺はそれぞれ直線 $3x+y=5$、$x+4y=-2$、$2x-3y=-4$ の上にある。直線 $ax+by=c$ を $g=ax+by-c$ と表すと $\nabla g=(a,b)$ で、$\nabla f=\lambda\nabla g$ は $(1,3)$ と $(a,b)$ が平行であることを意味する。$(3,1)$、$(1,4)$、$(2,-3)$ はどれも $(1,3)$ と平行でない（$b-3a\neq 0$）ので、辺の途中の点も候補にならない。

**頂点.** 残る候補は頂点だけで、$f(1,2)=7$、$f(2,-1)=-1$、$f(-2,0)=-2$。

よって**最大値** 7、**最小値** $-2$。本編の答え（$-2\leqq k\leqq 7$）と一致する。

もし三角形の辺の 1 本が等高線と平行（$\nabla g$ が $(1,3)$ と平行）なら、その辺の上では $f$ が一定で、辺の点がすべて未定乗数法の解になる。その場合も辺の両端（頂点）で同じ値をとるので、頂点を比べれば答えは出る。

**例 3** 出典 本編の問題 2 の解き直し

$f(x,y)=x^2+y^2$、$R$ は頂点 $\mathrm{O}(0,0)$、$\mathrm{A}(6,0)$、$\mathrm{B}(0,3)$ の三角形（周と内部）。$f$ の最大値と最小値を求めよ。

**内部.** $\nabla f=(2x,2y)=(0,0)$ となるのは原点だけで、原点は頂点 O なので内部の候補はない。

**辺 OA と OB.** 辺 OA の上では $y=0$ なので $f=x^2$（$0\leqq x\leqq 6$）、辺 OB の上では $f=y^2$（$0\leqq y\leqq 3$）。どちらも端点の外に候補はない。

**辺 AB.** 辺 AB は直線 $x+2y=6$ の上にある。$g=x+2y-6$ として

$$2x=\lambda,\qquad 2y=2\lambda,\qquad x+2y=6.$$

$x=\dfrac{\lambda}{2}$、$y=\lambda$ を 3 本目に入れると $\dfrac{5\lambda}{2}=6$、$\lambda=\dfrac{12}{5}$ で、点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$ を得る。$0<\dfrac{6}{5}<6$ なので P は辺 AB の途中にあり、$f(\mathrm{P})=\dfrac{36}{5}=7.2$。

**頂点.** $f(\mathrm{O})=0$、$f(\mathrm{A})=36$、$f(\mathrm{B})=9$。

候補の値 0, 36, 9, 7.2 を比べて、**最大値** 36（A）、**最小値** 0（O）。本編の答え（$0\leqq k\leqq 36$）と一致する。

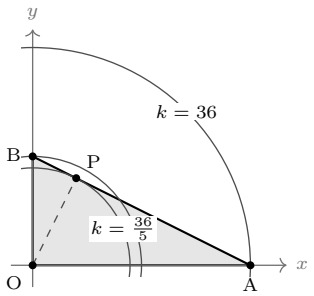



図 5：例 3。等高線は半径 $\frac{6}{\sqrt{5}}$, 3, 6 の円（高さ $\frac{36}{5}$, 9, 36）。半径 $\frac{6}{\sqrt{5}}$ の円は辺 AB に P で接する。

例 3 の点 P は、辺 AB の上だけで見れば $f$ の最小値を与える点である（P は原点から辺 AB に下ろした垂線の足で、原点からの距離は $\frac{6}{\sqrt{5}}$）。しかし三角形全体で見ると、P の値 7.2 は最大値でも最小値でもない。未定乗数法が出すのは**候補**であって答えではなく、内部・辺・頂点の候補を全部並べて比べる手順が必要になる。

**例 4** オリジナル

$x^2 + y^2 \leqq 2$ のとき、$xy$ の最大値と最小値を求めよ。

**内部.** $\nabla f = (y, x) = (0, 0)$ より原点 $(0, 0)$ が候補で、値は 0。

**境界.** 境界は円 $x^2 + y^2 = 2$ で角がない。$g = x^2 + y^2 - 2$ として

$$y = 2\lambda x, \qquad x = 2\lambda y, \qquad x^2 + y^2 = 2.$$

1 本目を 2 本目に入れると $x = 4\lambda^2 x$。$x = 0$ なら 1 本目から $y = 0$ で、これは円の上にないので $x \neq 0$、$4\lambda^2 = 1$、$\lambda = \pm\frac{1}{2}$。$\lambda = \frac{1}{2}$ なら $y = x$ で $(1, 1)$、$(-1, -1)$、値はどちらも 1。$\lambda = -\frac{1}{2}$ なら $y = -x$ で $(1, -1)$、$(-1, 1)$、値はどちらも $-1$。

候補の値 0, 1, $-1$ を比べて、**最大値** 1、**最小値** $-1$。

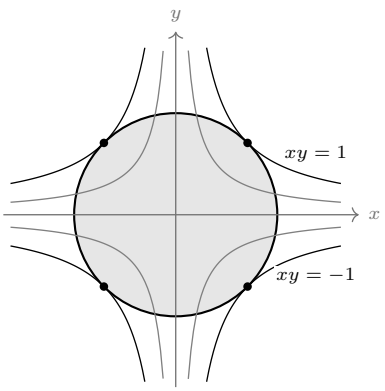



図 6：例 4。等高線 $xy = k$ は双曲線。$k = \pm 1$ の双曲線は円に 4 点 $(\pm 1, \pm 1)$ で接し、$k = \pm 0.4$ の双曲線（灰）は円を横切る。

例 4 の原点は $\nabla f = (0, 0)$ を満たすが、第 3 節で見た峠（鞍点）なので最大でも最小でもない。ここでも候補の中に答えでないものが混ざっている。なお例 4 は $x^2 + y^2 \geqq 2|xy|$（$(x \pm y)^2 \geqq 0$ から出る）を使えば $|xy| \leqq 1$ がすぐ出る。相加平均と相乗平均の関係を使う問題も、同じように未定乗数法で解き直せる。

**例 5** オリジナル

$x>0$、$y>0$、$xy=4$ のとき、$x+y$ の最小値を求めよ。

**解.** $g=xy-4$ として $1=\lambda y$、$1=\lambda x$、$xy=4$。前の 2 本から $x=y=\dfrac{1}{\lambda}$ で、$x,y>0$ と 3 本目から $x=y=2$（$\lambda=\frac{1}{2}$）。候補はこの 1 点で、値は 4。
相加平均と相乗平均の関係 $x+y\geqq 2\sqrt{xy}=4$（等号は $x=y=2$）からも同じ答え **最小値** 4 が出る。

例 5 では、未定乗数法の候補が 1 つだけ出て、それが最小値だった。しかしこの 1 点が最大か最小かは未定乗数法からは分からない。実際、曲線 $xy=4$（$x>0$）は $x$ をいくらでも大きくできる**有界でない**曲線で、$x+y$ はいくらでも大きくなるので最大値は存在しない。例 1 のような「閉じていて有界な図形なら最大値・最小値が必ずある」という保証が無いとき、候補が最小値であることは相加相乗のような別の議論で確かめる必要がある。

**$\lambda$ の意味：条件を少し緩めたときの増え方**

$\lambda$ は補助の未知数として導入したが、値そのものにも意味がある。例 1 の条件を $x^2+y^2=c$ に変えると、同じ計算で最大値は $5\sqrt{c}$ になる。$c=1+\varepsilon$（$\varepsilon$ は小さい数）とすると、$(1+\frac{\varepsilon}{2})^2=1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}$ から $\sqrt{1+\varepsilon}\fallingdotseq 1+\frac{\varepsilon}{2}$ なので、最大値は $5+\frac{5}{2}\varepsilon$ くらいになる。条件の右辺を $\varepsilon$ だけ増やすと、最大値はその $\frac{5}{2}$ 倍だけ増える。この $\frac{5}{2}$ が例 1 の $\lambda$ と一致する。例 5 でも、$xy=4+\varepsilon$ のときの最小値は $2\sqrt{4+\varepsilon}\fallingdotseq 4+\frac{1}{2}\varepsilon$ で、増え方 $\frac{1}{2}$ が $\lambda$ に一致する。経済学では、予算や資源の制約を表す $g$ について $\lambda$ を「影の価格」とよび、制約を 1 単位緩めたら目的の量がどれだけ増えるかを表す数として使う。

## 6. 注意点と手順のまとめ

**領域 $R$ での最大・最小を求める手順**

1. **内部**：$f_x=0,\ f_y=0$ を満たす点を候補にする。
2. **境界のなめらかな部分**（$g=0$ で $\nabla g\neq(0,0)$）：$f_x=\lambda g_x,\ f_y=\lambda g_y,\ g=0$ の解を候補にする。
3. **そのほかの点**：多角形の頂点、境界の線分の端、$\nabla g=(0,0)$ になる境界の点をすべて候補にする。
4. 候補での $f$ の値を比べ、いちばん大きいものが最大値、いちばん小さいものが最小値。ただし $R$ が閉じていて有界であることを確かめておく（そうでなければ最大値・最小値が存在しないことがある）。

この手順の 1 と 2 は**必要条件**にすぎない。最大・最小になる点は候補の中に必ずあるが、候補がすべて最大・最小になるわけではない（例 3 の P、例 4 の原点）。だから手順 4 で値を比べる。

手順 3 の「$\nabla g=(0,0)$ になる点」を候補に入れ忘れると、答えの点が候補に入らないことがある。曲線 $y^2=x^3$ の上で $f=x$ の最小値を考える。曲線の点は $(t^2,\ t^3)$ と書けるので $x=t^2\geqq 0$ で、最小値は原点での 0 である。ところが $g=y^2-x^3$ として未定乗数法の式を立てると

$$1=\lambda\cdot(-3x^2),\qquad 0=\lambda\cdot 2y,\qquad y^2=x^3$$

で、2 本目から $\lambda = 0$ か $y = 0$。$\lambda = 0$ なら 1 本目が $1 = 0$、$y = 0$ なら 3 本目から $x = 0$ で 1 本目が $1 = 0$ になり、解は 1 つもない。原点では $\nabla g = (-3x^2,\ 2y) = (0, 0)$ で、曲線はそこで折り返すようにとがっていて、なめらかでない。この点は多角形の頂点と同じく、未定乗数法の前提（$\nabla g \neq (0, 0)$）から外れるので、別に候補に入れる必要がある。

**この詳説が証明せずに使ったこと**

1. **一次近似の誤差が小さいこと**（第 3 節）。$h, k$ を 0 に近づけると、2 次以上の項が 1 次の部分よりずっと速く 0 に近づくこと。多項式なら展開の形から見当はつくが、正確に述べるには極限の定義が必要になる。
2. **陰関数定理**（第 4 節）。$\nabla g \neq (0, 0)$ の点の近くで、$g = 0$ が途切れないなめらかな曲線になり、接線の向きに沿ってたどれること。
3. **最大値・最小値の定理**（第 5 節）。閉じていて有界な範囲の上で、連続な関数は最大値と最小値をもつこと。証明には実数の連続性（数直線に隙間がないこと）を使う。

三つとも大学 1 年の微分積分で証明する。また、ここでは 2 変数 1 条件だけを扱ったが、変数が 3 個以上・条件が 2 本以上でも、「$\nabla f$ が条件の勾配たちの組み合わせになる」という同じ形の定理が成り立つ。

**練習** オリジナル

(1) $x + y = 1$ のとき、$x^2 + y^2$ の最小値を未定乗数法で求めよ。また、最大値がないことを説明せよ。

(2) $x^2 + y^2 \leqq 1$ のとき、$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ の最大値と最小値を求めよ。

**練習の答え**

**(1)** $g = x + y - 1$ として $2x = \lambda$、$2y = \lambda$、$x + y = 1$。$x = y = \frac{1}{2}$（$\lambda = 1$）で値は $\frac{1}{2}$。本編の方法で見ると、等高線 $x^2 + y^2 = k$ は半径 $\sqrt{k}$ の円で、直線 $x + y = 1$ に接するのは半径が原点と直線の距離 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、つまり $k = \frac{1}{2}$ のときである。**最小値** $\frac{1}{2}$。直線は有界でなく、$(x, y) = (t,\ 1 - t)$ で $t$ を大きくすれば $x^2 + y^2$ はいくらでも大きくなるので、最大値はない。

**(2)** **内部**：$f_x = 2x - 1 = 0$、$f_y = 4y = 0$ より $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$、値 $-\frac{1}{4}$。
**境界**：$g = x^2 + y^2 - 1$ として $2x - 1 = 2\lambda x$、$4y = 2\lambda y$、$x^2 + y^2 = 1$。2 本目から $y = 0$ か $\lambda = 2$。

- $y = 0$ のとき $x = \pm 1$。$f(1, 0) = 0$（$\lambda = \frac{1}{2}$）、$f(-1, 0) = 2$（$\lambda = \frac{3}{2}$）。
- $\lambda = 2$ のとき $2x - 1 = 4x$ より $x = -\frac{1}{2}$、$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。値はどちらも $\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$。

円板は閉じていて有界で、境界の円には角がない。候補の値 $-\frac{1}{4},\ 0,\ 2,\ \frac{9}{4}$ を比べて、**最大値** $\frac{9}{4}$（$x = -\frac{1}{2},\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$）、**最小値** $-\frac{1}{4}$（$x = \frac{1}{2},\ y = 0$）。最小値は内部の候補、最大値は境界の候補で、両方を調べないと答えが出ない。検算として、円の上では $y^2 = 1 - x^2$ なので $f = 2 - x^2 - x$（$-1 \leqq x \leqq 1$）となり、この 2 次関数の最大値 $\frac{9}{4}$（$x = -\frac{1}{2}$）・最小値 0（$x = 1$）が境界の候補と一致する。