1の∞乗の極限とマクローリン展開

高一数Ⅲ　木下智貴

テスト，楽しんでいただけましたでしょうか．おまけ問題の最後まで辿り着かなかった人もいるかと思いますが，けっこう良問を作ったつもりなのでじっくり解いてみてください．おまけ問題に関連して，少し書きたい話題があったので補遺という形でみなさんに紹介します．

おまけ問題（1）

$\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{x-\sin x}{x^3}\right\}=\dfrac{1}{6}$ が成立することが知られている．これを用いて，以下の極限を求めよ：

$$\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right\}$$

解答は省略して，この問題を同僚の先生に見せたときに教えてもらって，いい一般化だなあと思ったものを紹介しますね．

【おまけ問題（1）を拡張した定理】

$\lim_{x\to a} f(x)=1$，$\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$，
$\lim_{x\to a} g(x)\{f(x)-1\}=b$ の時，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\}^{g(x)}=e^b$$

が成り立つ．

証明はみなさんに任せます．ほとんど今回の問題の解答の通りで，底を $f(x)=1+\{f(x)-1\}$ と変形して指数を揃えにいくのが肝です．ただしこの変形では指数に $1/\{f(x)-1\}$ を作る（$f(x)-1$ で割る）ので，$b=0$ で $f(x)-1$ が $x=a$ の近くで 0 をとりまくるような時は，そのままでは使えません．それでも定理は $b=0$ を含めて成り立ちます．$h(u)=\log(1+u)/u$（ただし $h(0)=1$ と決める）とおくと，$u\to 0$ で $h(u)\to 1$ なので h は $u=0$ でもつながっていて，$\log(1+u)=u\,h(u)$ が $u=0$ も含めて成り立ちます．これを使うと $g(x)\log f(x)=g(x)\{f(x)-1\}\cdot h\left(f(x)-1\right)\to b\cdot 1=b$ となり，割り算をしないので $f(x)=1$ となる点があっても困りません．あとは e の肩に乗せれば e^b が出ます．
今回では $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x^2}$，$a=0$，$b=-\dfrac{1}{6}$ となっていますね．

あと，冒頭の見たことない極限に「！？」となった人も多かったのではないでしょうか．この極限を近似として考えると，$x\simeq 0$ で，

$$\frac{x-\sin x}{x^3}\simeq\frac{1}{6}\Rightarrow x-\sin x\simeq\frac{x^3}{6}$$
$$\Rightarrow \sin x\simeq x-\frac{x^3}{6}$$

という近似が成り立つということがわかります．この近似は「マクローリン展開」というものを利用しています．具体的には，

【マクローリン展開】

多くのいい感じの関数 $f(x)$ について，x が 0 に近いところでは，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

が成り立つ．

和は x でなく n についてとっていることに注意してください．また，$f^{(n)}(0)$ は $f(x)$ の $x=0$ での n 次微分係数です．この「いい感じの」というところや「x が 0 に近いところでは」というところの厳密な話はちょい長くなるのでここではしないのと，だからこそこれを無条件でつかっては欲しくないですが，これを用いて $\sin x$ を展開してみると，

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

のようになります．x が 0 に近いところでは n がデカくなるにつれて x^n はチリカスみたいに小さくなるので，例えば上の式で3次までで打ち切って近似式を作ると，x が 0 に近いところでは

$$\sin x\simeq x-\frac{x^3}{3!}=x-\frac{x^3}{6}$$

となることがわかります．このマクローリン展開，あるいはテイラー展開やテイラーの定理などは大学数学の範囲ではあるものの，高校数学の知識で十分理解できるうえ大学入試でこれが背景の問題がめちゃ出るので気になる人は調べてみると良いと思います．

おまけ問題（2）

関数 $y=\dfrac{1}{2x+7}$ の n 階導関数 $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ を n で表せ.

解答には帰納法による証明も入れていたのですが，スペースの関係で載りませんでした．ただ，（パソコン下手の俺が）結構頑張って打ったので供養したいのと，教育的価値もそこそこあるので，ここに載せておきます．

【帰納法を用いた証明】

$$\frac{d^n y}{dx^n}=2^n\times(-1)^n\times n!\times(2x+7)^{-(n+1)}$$

と予想し，これを数学的帰納法で示す．$n=1$ では成立．$n=k$ で成立する時，$t=2x+7$ とおくと，

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}=\frac{d}{dx}\frac{d^k y}{dx^k}=\frac{d}{dx}\left\{2^k\times(-1)^k\times k!\times(2x+7)^{-(k+1)}\right\}$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{2^k\times(-1)^k\times k!\times t^{-(k+1)}\right\}=\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left\{2^k\times(-1)^k\times k!\times t^{-(k+1)}\right\}$$

$$=2\times2^k\times(-1)^k\times k!\times\frac{d}{dt}\left\{t^{-(k+1)}\right\}=2\times2^k\times(-1)^k\times k!\times\{-(k+1)\}\times t^{-(k+2)}$$

$$=2^{k+1}\times(-1)^{k+1}\times(k+1)!\times(2x+7)^{-(k+1+1)}$$

より $n=k+1$ でも成立．よって数学的帰納法により，

$$\frac{d^n y}{dx^n}=2^n\times(-1)^n\times n!\times(2x+7)^{-(n+1)}$$

が示された！！ ■

このように，何かの操作をくりかえしてできた式の規則性を示すときには帰納法が非常に相性がいいです．（これは当たり前で，「帰納法」という発想自体が一つ前までの操作でできた規則性を前提としてもう一度操作をしてどう変化するのかを見るものだからです．）これは記憶するに値すると思います．