# 対数微分法と、対数を取る場面

解説　高2数学・微分

授業で扱った問題は、自然数 $n$ のうち $\left(\dfrac{n}{20}\right)^{\frac{n}{20}}$ がいちばん小さくなるものを求める問題でした[1]。$x=\dfrac{n}{20}$ とおけば、関数 $f(x)=x^x\ (x>0)$ の増減の問題になります。その $f(x)$ を微分するときに使ったのが、この頁で扱う**対数微分法**です。

## 1. $x^x$ はなぜ公式で微分できないのか

これまでに学んだ微分の公式のうち、累乗の形をしたものは2つあります。

- $(x^n)'=nx^{n-1}$：底が変数で、指数 $n$ は定数
- $(a^x)'=a^x\log a$：底 $a$ は定数で、指数が変数[2]

$x^x$ は底も指数も変数なので、どちらの公式にも当てはまりません。たとえば $(x^x)'=x\cdot x^{x-1}=x^x$ とする計算は、指数を定数とみなした誤りです。

そこで対数を取ります。$y=x^x$ の両辺の自然対数を取ると、対数の性質 $\log a^p=p\log a$ により指数が前に出て

$$\log y=x\log x$$

となります。右辺は $x$ と $\log x$ の積なので、積の微分で扱えます。左辺の $\log y$ は、$y$ が $x$ の関数であることに注意して合成関数の微分をすると $\dfrac{d}{dx}\log y=\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ です。したがって

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\log x+1 \quad \text{より}$$
$$\frac{dy}{dx}=y(\log x+1)=x^x(\log x+1)$$

が得られます。

> **対数微分法の手順**
>
> (1) $y=f(x)$ の両辺が正であることを確かめてから、両辺の自然対数を取る。
>
> (2) 右辺の $\log f(x)$ を対数の性質（積は和に、商は差に、指数は係数に）で、微分しやすい形に整理する。
>
> (3) 両辺を $x$ で微分する。左辺は $\dfrac{d}{dx}\log y=\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ となる。

(4) 両辺に $y$ をかけて $\dfrac{dy}{dx}$ を求め、最後に $y$ を $f(x)$ に戻す。

(3)の右辺は、計算の結果としては $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ に等しくなります。ただし、$f'(x)$ が直接求めにくいので対数を取っているのですから、(3)では(2)で整理した式のほうを微分します。

**別の見方：$e$ の累乗に書き直す**

$x = e^{\log x}$ なので、$x^x = \left(e^{\log x}\right)^x = e^{x\log x}$ と書き直せます。これを合成関数として微分すると

$$\left(e^{x\log x}\right)' = e^{x\log x}\cdot(x\log x)' = x^x(\log x + 1)$$

となり、同じ答えになります。一般に $\{f(x)\}^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$ と書けるので、対数微分法の計算とこの書き直しの計算は中身が同じです。

授業で扱った問題に戻ると、$f'(x) = x^x(\log x + 1)$ で $x^x > 0$ なので、$f'(x)$ の符号は $\log x + 1$ の符号と一致します。$\log x + 1 = 0$ となるのは $x = \dfrac{1}{e}$ のときだけで、$0 < x < \dfrac{1}{e}$ では $f'(x) < 0$、$x > \dfrac{1}{e}$ では $f'(x) > 0$ です。したがって $f(x)$ は $x = \dfrac{1}{e}$ で最小になります。

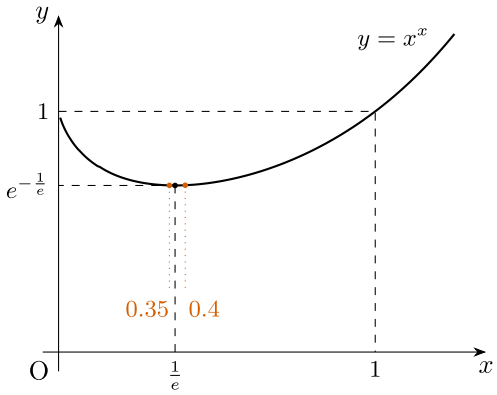



図1　$y = x^x$ のグラフ。$x = \frac{1}{e}$ で最小になり、その両側に $x = 0.35$ と $x = 0.4$ の点がある

$2.7 < e < 2.8$ より $\dfrac{1}{2.8} < \dfrac{1}{e} < \dfrac{1}{2.7}$ で、$0.35 < \dfrac{1}{2.8}$、$\dfrac{1}{2.7} < 0.4$ なので $0.35 < \dfrac{1}{e} < 0.4$ です。$x = \dfrac{n}{20}$ は $0.05$ 刻みなので、自然数 $n$ の候補は $\dfrac{1}{e}$ をはさむ $n = 7$ と $n = 8$ の2つに絞られます。

両者を比べるには、それぞれを 20 乗すると $\left(\dfrac{7}{20}\right)^7 = \dfrac{7^7}{20^7}$、$\left(\dfrac{8}{20}\right)^8 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^8 = \dfrac{2^8}{5^8}$ となり、前者を後者で割ると

$$\begin{aligned}\frac{7^7}{20^7}\cdot\frac{5^8}{2^8} &= \frac{7^7\cdot 5^8}{2^{14}\cdot 5^7\cdot 2^8}\\ &= \frac{5\cdot 7^7}{2^{22}}\\ &= \frac{4117715}{4194304} < 1\end{aligned}$$

です。前者のほうが小さいので、答えは $n=7$ です。

### 積と商でできた式にも使える

対数微分法は、$x^x$ のような式だけでなく、因数がいくつもかけ合わされた式の微分にも使えます。たとえば $x>-1$ で

$$y=\frac{(x+1)^2\sqrt{x+2}}{(x+3)^3}$$

を微分するとき、商の微分と積の微分を重ねると式が長くなります。$y>0$ を確かめて対数を取ると

$$\log y = 2\log(x+1)+\frac{1}{2}\log(x+2)-3\log(x+3)$$

と和と差に分かれ、各項は1つずつ微分できます。

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}-\frac{3}{x+3} \quad \text{より}\\ y' &= \frac{(x+1)^2\sqrt{x+2}}{(x+3)^3}\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}-\frac{3}{x+3}\right)\end{aligned}$$

増減を調べるだけなら、$y>0$ なので $y'$ の符号はかっこの中の符号と一致し、かっこの中を通分して符号を調べれば済みます。

> $y$ が負の値もとる関数のときは、$|y|$ の対数を取ります。$y<0$ のところでも $\dfrac{d}{dx}\log|y|=\dfrac{y'}{y}$ が成り立つので、同じ手順で $y'$ が求まります。

もう1つ例を挙げると、$y=x^{\sin x}$ $(x>0)$ は $\log y=\sin x\cdot\log x$ より

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \cos x\log x+\frac{\sin x}{x},\\ y' &= x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right)\end{aligned}$$

です。底と指数の両方に変数がある式（$\{f(x)\}^{g(x)}$ の形）は、累乗と指数関数の公式では微分できないので、対数微分法か、上の $e$ の累乗への書き直しで微分します。

## 2. 微分以外で対数を取る場面

対数を取ると、累乗は積に、積は和に変わります。この性質は微分以外の場面でも使えますが、微分のとき以外は思いつきにくいようです。次の形を見たら対数を取ることを考えましょう。

> **対数を取ることを考える形**
>
> 1. 底と指数の両方に変数がある：対数を取ると指数が log の係数になる
> 2. 積・商・累乗だけでできている（和や差を含まない）：対数を取ると和と差になる
> 3. 項が限りなく続く積：対数を取ると和の極限になる

$\log(a+b)$ は $\log a$ と $\log b$ で表せないので、2つめでは和や差を含まないことを条件にしています。

### 方程式の連立

指数・対数関数の授業では、底と指数の両方に文字が入った式を3本連立する問題を2題扱いました。1題目は、正の数 $x, y, z$ が

$$x^{xyz} = y^3, \qquad y^{xyz} = z^3, \qquad z^{xyz} = x^3$$

を満たすとき、$x, y, z$ を求める問題です。どちらの問題でも、各式の両辺の対数を取ると、指数が log の係数として前に出て、$\log x$, $\log y$, $\log z$ についての式になります。1題目は $t = xyz$ とおくと

$$t\log x = 3\log y, \quad t\log y = 3\log z, \quad t\log z = 3\log x$$

となります。$\log x, \log y, \log z$ のどれか1つが $0$ なら、3式を順にたどると3つとも $0$ になり、$x = y = z = 1$ です（$t = 1$ となり、元の3式も満たします）。どれも $0$ でないときは、3式を辺々かけて $\log x \log y \log z$ で割ると $t^3 = 27$、つまり $t = 3$ です。このとき $\log y = \log x$、$\log z = \log y$ なので $x = y = z$ で、$xyz = x^3 = 3$ から $x = y = z = \sqrt[3]{3}$ となります。

2題目は、$\log_a x$, $\log_b y$, $\log_c z$ を未知数とする連立1次方程式として解きました。

### $a^b$ と $b^a$ の大小

$3^\pi$ と $\pi^3$ のどちらが大きいかを考えます。どちらも正なので、自然対数を取って比べることができます（log は増加関数なので、対数の大小と元の数の大小は一致します）。

$$\log 3^\pi = \pi\log 3, \qquad \log \pi^3 = 3\log \pi$$

両者を正の数 $3\pi$ で割ると、比べるものは $\dfrac{\log 3}{3}$ と $\dfrac{\log \pi}{\pi}$ になり、同じ関数 $g(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の $x = 3$ と $x = \pi$ での値の比較になります。

$$g'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

なので、$g(x)$ は $0 < x \leqq e$ で増加し、$x \geqq e$ で減少します。$e < 3 < \pi$ なので $g(3) > g(\pi)$、すなわち $\pi \log 3 > 3 \log \pi$ となり、$3^\pi > \pi^3$ がわかります。

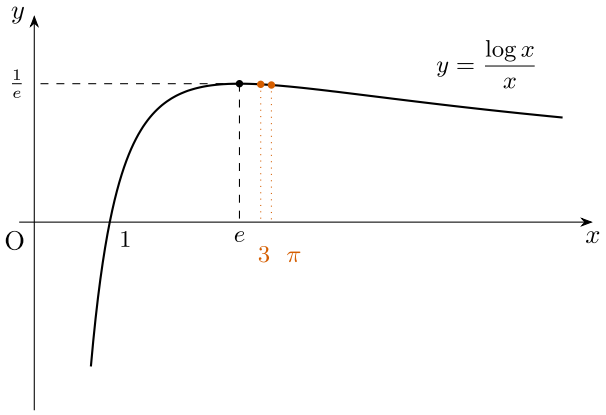



図2　$y = \frac{\log x}{x}$ のグラフ。$x = e$ で最大となり、$x > e$ では減少する。$x = 3$ と $x = \pi$ での値を比べる

一般に、正の数 $a, b$ について

$$a^b > b^a \iff b \log a > a \log b \iff \frac{\log a}{a} > \frac{\log b}{b}$$

が成り立ちます（2つめの同値は両辺を正の数 $ab$ で割っただけです）。底と指数を入れ替えた2数の比較は、関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の値の比較に言い換えられます。

## 限りなく続く積

3つめの形は、積分の単元で学ぶ区分求積法と組み合わせて使います[3]。たとえば $\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$ の極限は、対数を取ると

$$\log \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log \frac{k}{n}$$

という和になり、$n \to \infty$ でこの和は $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx = -1$ に近づきます。したがって元の式は $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ に近づきます。

---

1　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。

2　この頁の log は自然対数、つまり底が $e$ の対数です。

3　区分求積法とは、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h(x)\, dx$ という関係を使って、和の極限を積分で求める方法のことです。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。

---