解けない漸化式と平均値の定理の注意点

解説　高2数学・微分

授業で扱った問題は、方程式$x = e^{-\frac{x}{3}}$の実数解αに向かって、漸化式$a_{n+1} = e^{-\frac{a_n}{3}}$の数列が近づいていくことを示す問題でした[1]。$a_n$の一般項は式で書けないので、「$a_n$と$\alpha$の差がどれだけ縮むか」を平均値の定理で見積もるのが解き方の柱です。この型の答案は筋道が決まっているぶん、細部の書き方で減点されやすいので、ここでは別の数列を材料にして、どこで何に気をつければよいかを順に確かめます。

1. 材料にする数列と、答案の骨格

この頁では

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_{n+1} &= \sqrt{a_n + 6} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

を材料にします。$f(x) = \sqrt{x+6}$とおくと$a_{n+1} = f(a_n)$で、$f(\alpha) = \alpha$を解くと$\alpha = 3$です（$\alpha^2 = \alpha + 6$、$\alpha \geqq 0$）。グラフの上では、$y = f(x)$と$y = x$の間を階段のように行き来しながら交点$(3,\,3)$へ近づいていきます。

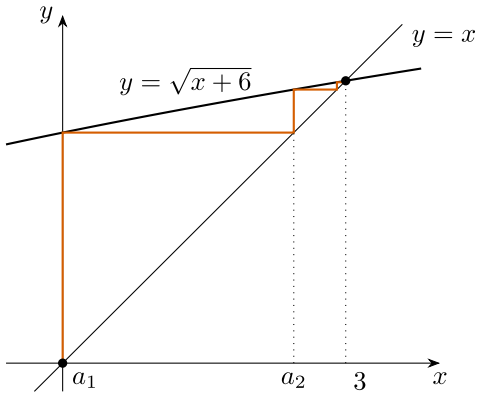


図1　$y = \sqrt{x+6}$ と $y = x$ の間を行き来しながら、a_1, a_2, a_3, $\cdots$ が交点 $(3,\,3)$ に近づいていく

先に、減点されない答案の流れを置いておきます。以下の節は、この中のどの一行を崩すとどう困るかの説明です。

答案の骨格（$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$）

(i) すべてのnで$a_n \geqq 0$である（$a_1 = 0$で、a_{n+1}は平方根なので0以上）。

(ii) $x \geqq 0$で$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}$であり、$0 < f'(x) \leqq \dfrac{1}{2\sqrt{6}} < \dfrac{1}{4}$。

(iii) $a_n \neq 3$のとき、fは$x > -6$で微分可能なので、平均値の定理により

$$f(a_n) - f(3) = f'(c_n)(a_n - 3)$$

をみたすc_nがa_nと3の間に存在する。$f(a_n) = a_{n+1}$、$f(3) = 3$なので$a_{n+1} - 3 = f'(c_n)(a_n - 3)$。両辺の絶対値をとり、$c_n > 0$と(ii)を使うと

$$|a_{n+1} - 3| = |f'(c_n)|\,|a_n - 3| \leqq \frac{1}{4}|a_n - 3|$$

(iv) $a_n = 3$のときは両辺とも0なので、この不等式はやはり成り立つ。よってすべてのnで$|a_{n+1} - 3| \leqq \frac{1}{4}|a_n - 3|$。

(v) これをくり返し用いて$|a_n - 3| \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}|a_1 - 3| = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$。右辺は$n \to \infty$で0に近づくので、はさみうちの原理により$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$。

2. 絶対値は「等式のうちに」とる

(iii)では、$a_{n+1} - 3 = f'(c_n)(a_n - 3)$という**等式**の段階で両辺の絶対値をとり、それから不等式に移っています。順序を逆にして、係数についての不等式$-r \leqq f'(c_n) \leqq r$に$a_n - 3$を掛けようとすると困ります。$a_n - 3$が負なら不等号の向きが反転しますし、正負が項によって入れかわる数列も珍しくありません（授業で扱った問題の$e^{-\frac{x}{3}}$は減少関数なので、$a_n - \alpha$の符号は1項ごとに反転します）。

> **ポイント①**
>
> $a_{n+1} - \alpha = (\text{係数}) \times (a_n - \alpha)$の形を作ったら、不等式に進む前に、等式のまま両辺の絶対値をとる。こうすれば$a_n - \alpha$の符号を気にせずに係数だけを評価できる。

絶対値どうしの積なら$|\text{係数}| \leqq r$の両辺に0以上の数$|a_n - \alpha|$を掛けることになり、向きの心配がありません。

3. 係数は「1より小さい定数」で押さえる

ここが一番大事な点です。(ii)で求めたのは「$f'(x)$は$\frac{1}{4}$以下」という**nによらない数**での押さえでした。これを「$|f'(c_n)| < 1$」で済ませた答案は、はさみうちに進めません。

> **ポイント②**
>
> $|f'(c_n)| < 1$を示すだけでは足りない。$0 \leqq r < 1$をみたす**定数r**を見つけて$|f'(c_n)| \leqq r$と押さえる。

なぜ足りないのかは、1より小さい数をどんどん掛けても0に近づかない例を見ると分かります。

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

の各因数は1より小さい正の数です。ところが$1 - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k}$と分けると隣どうしで約分が進み、

$$P_n = \frac{n+2}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

となって、0ではなく$\dfrac{1}{2}$に落ち着きます。因数が1に近づいていくので、掛けても縮み方がだんだん弱まるのです。一方、同じ$\dfrac{3}{4}$から始めても、毎回きっちり$\dfrac{3}{4}$を掛けた$\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$は0に向かいます。

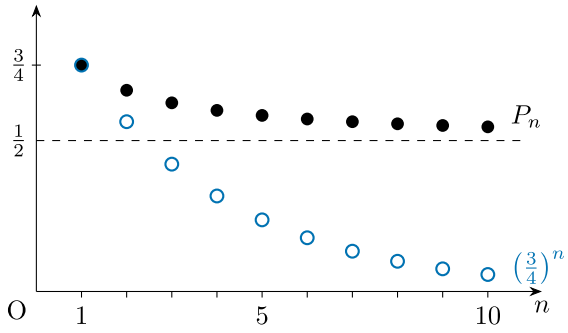


図2　P_n（黒丸）と $\left(\frac{3}{4}\right)^n$（青い白丸）。$P_n$ は $\frac{1}{2}$ の破線より上にとどまり、$\left(\frac{3}{4}\right)^n$ は 0 に近づく

答案に戻ると、くり返し用いた結果は$|a_n - \alpha| = |f'(c_1)|\,|f'(c_2)|\cdots|f'(c_{n-1})|\,|a_1 - \alpha|$で、係数の積は上の$P_n$と同じ形をしています。$c_k$が$\alpha$に近づくにつれて$|f'(c_k)|$が1に近づくような関数なら、この積は0に向かうとは限りません。「どの因数もr以下」と言える定数$r < 1$があってはじめて、積をr^{n-1}で上から押さえられます。

> **×誤答例×**
>
> $|a_{n+1} - 3| = |f'(c_n)|\,|a_n - 3|$をくり返し用いて
>
> $$|a_n - 3| = |f'(c_1)|\,|f'(c_2)|\cdots|f'(c_{n-1})| \cdot 3$$
>
> 各kで$0 < |f'(c_k)| < 1$なので、右辺の積は$n \to \infty$で0に近づく。よって$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$。

最後の「積は0に近づく」が根拠のない一行で、上のP_nがその反例です。この答案は結論の核心を示していないので得点になりません。

4. cではなくc_nと書く

平均値の定理で現れる点は、a_nとαの間のどこかにあります。a_nが変われば区間が変わり、その点も変わります。下の図は、曲がり具合が見やすいように初項だけを$a_1 = -5$に取り替えたものです（このとき$a_2 = 1$、$a_3 = \sqrt{7}$）。a_1と3を結ぶ弦、a_2と3を結ぶ弦のそれぞれに平行な接線を破線で引くと、接点は$c_1 = -2$、$c_2 = \dfrac{3\sqrt{7}-4}{2}$ $(\fallingdotseq 1.97)$で、まったく別の場所にあります。

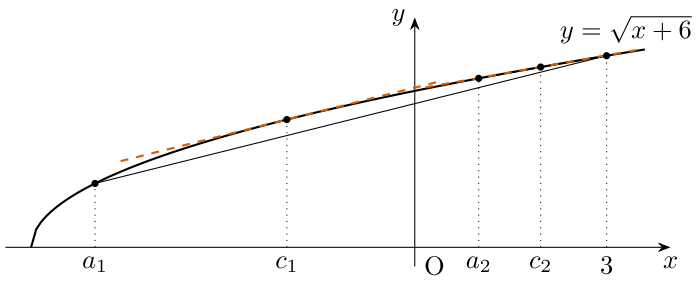


図3　初項を $a_1 = -5$ にしたときの2本の弦と、それぞれに平行な接線（破線）。接点 c_1, c_2 の位置が違う

> **ポイント③**
>
> 平均値の定理で取り出した点はnごとに違うので、c_nのように番号をつけて書く。

番号を落としてcと書くと、つい次のように進めてしまいます。

> **×誤答例×**
>
> 平均値の定理より$a_{n+1} - 3 = f'(c)(a_n - 3)$。絶対値をつけると$|a_{n+1} - 3| = |f'(c)|\,|a_n - 3|$で、番号を1つずつ下げていくと
>
> $$|a_n - 3| = |f'(c)|^{n-1}|a_1 - 3|$$

1回ごとに違う係数を同じ数のべき乗にまとめていて、等式として誤りです。c_nと書いておけば、この書き違いは起こりません。

5. $a_n = \alpha$の場合はどこで片づけるか

平均値の定理は、端点の異なる区間（$a_n \neq \alpha$）でしか使えません。$a_n = \alpha$なら「a_nとαの間」に点がそもそも無いからです。そこで答案の骨格では(iii)を$a_n \neq 3$に限り、(iv)で$a_n = 3$の場合を拾っていました。

> **ポイント④**

> $a_n=\alpha$の場合は、c_nが式から消えて「$|a_{n+1}-\alpha| \leqq r|a_n-\alpha|$」という形になったところで回収し、そのあとでくり返し用いる。

$a_n=\alpha$なら$a_{n+1}=f(\alpha)=\alpha$なので、この不等式は$0 \leqq 0$として成り立ちます。拾う場所が早すぎても遅すぎても、答案に傷が残ります。

遅すぎる場合

> **×誤答例×**
>
> **[1] $a_n \neq 3$のとき**　平均値の定理より$a_{n+1}-3=f'(c_n)(a_n-3)$となるc_nがa_nと3の間にあり、$|a_{n+1}-3| \leqq \dfrac{1}{4}|a_n-3|$。これをくり返し用いて$|a_n-3| \leqq 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$。
>
> **[2] $a_n=3$のとき**　$|a_n-3|=0 \leqq 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$。
>
> [1][2]より、すべてのnで$|a_n-3| \leqq 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$。

一見もっともらしく見えますが、[1]の「くり返し用いて」の段で、$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$のすべてに平均値の定理を当てています。[1]で仮定したのは番号nの項が3でないことだけなので、それより前の項についての仮定は書かれていません。

数学的には、ここは埋められる穴です。ある番号で$a_k=\alpha$となれば$a_{k+1}=f(\alpha)=\alpha$で、以後の項はずっとαになります。裏返すと、$a_n \neq \alpha$なら$a_1, \cdots, a_{n-1}$もどれもαではありません。しかし答案はこの事情に一言も触れておらず、読み手には「1つの番号での仮定を、ほかの番号にも流用している」としか見えません。場合分けのnと、くり返しで動かす番号が同じ文字なので、なおさら混乱して見えます。同じ形のまま[1]の中で極限まで取ってしまう答案もありますが、欠点は同じです。

骨格の(iv)のように、くり返す**前**に「$a_n=3$でも不等式は成り立つ」と1行添えておけば、不等式はすべてのnで成り立つ1本の式になり、途中の項がαに当たるかを気にせずに済みます。

早すぎる場合

> **×誤答例×**
>
> $a_n \neq 3$のとき、平均値の定理より$a_{n+1}-3=f'(c_n)(a_n-3)$となるc_nがa_nと3の間に存在する。この等式は$a_n=3$のときも成り立つ。

$a_n=3$のときはc_nが取れないので、「この等式が成り立つ」と言おうにも、式の中のc_nが何を指すのかが決まっていません（両辺が0になるので、c_nに何を入れても形式上は成り立ちますが、それは定理が与え

たc_nではありません)。c_nを定数rで置きかえて式から消してから回収すれば、このあいまいさは生じません。

6. 平均値の定理を使うときの3つの確認

平均値の定理を答案で使うときは、毎回次の3点を確かめます。

> **平均値の定理の確認事項**
>
> 1. 端点が等しい場合（$a=b$）は定理が使えないので、別に扱う。
> 2. fが区間で連続かつ微分可能であることを確かめて書く（「$x>-6$で微分可能」のように、定義域ごと言えば足りることが多い）。
> 3. aとbの大小が分からないときは、「cがa**と**b**の間に**存在する」と書く。「$a<c<b$をみたすc」とは書かない。

答案の骨格の(iii)では、a_nは3より小さいことも大きいこともありうる形で書いているので、3番目に従って「a_nと3の間」と書いています。

7. 項の範囲を先に絞る

骨格の(i)はなぜ必要だったのでしょうか。$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}$は、$x$が$-6$に近づくといくらでも大きくなります。たとえば$-6<x\leqq -\dfrac{23}{4}$では$f'(x)\geqq 1$です。つまり定義域全体では$|f'|$を1より小さい定数で押さえられません。

> $|f'|$を1より小さい定数で押さえるために、数列の項がどの範囲を動くかを先に調べておく

この数列では「$a_n\geqq 0$」が分かれば、c_nはa_nと3の間、すなわち0以上の範囲にあるので、(ii)の評価$|f'(c_n)|<\dfrac{1}{4}$が使えます。範囲の絞り込みは多くの場合、数学的帰納法で示します。範囲をどこまで狭めれば定数$r<1$が取れるかを、f'の式を見て先に決めておくと、帰納法で示す内容もはっきりします。

なお、この数列は平均値の定理を使わずに、有理化で差を作る方法でも処理できます。

$$a_{n+1}-3=\sqrt{a_n+6}-3=\frac{a_n-3}{\sqrt{a_n+6}+3}$$

で、$a_n\geqq 0$なら分母は$\sqrt{6}+3>5$なので$|a_{n+1}-3|<\dfrac{1}{5}|a_n-3|$です。この方法でも、係数を定数で押さえるために$a_n\geqq 0$を先に示している点は同じです。

8. 解がただ一つあることの示し方と中間値の定理

この型の問題は、たいてい「方程式$x = f(x)$がただ一つの実数解をもつことを示せ」という小問から始まります。解が**ある**ことを中間値の定理で言い、解が**2つ以上ない**ことを関数の単調性で言う、という二段構えが定番です。例として方程式$2x = \cos x$を考えます。$g(x) = 2x - \cos x$とおくとgは連続で、$g(0) = -1 < 0$、$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi > 0$なので、$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$に$g(x) = 0$の解があります。さらに$g'(x) = 2 + \sin x > 0$なので$g$は単調増加で、$0$になる点は$1$つしかありません。

> **中間値の定理**
>
> 関数$f(x)$が閉区間$[a,\, b]$で連続で、$f(a)f(b) < 0$ならば、方程式$f(x) = 0$は開区間$(a,\, b)$に少なくとも1つの解をもつ。

中間値の定理と平均値の定理は名前が似ていますが、要る仮定が違います。中間値の定理で欠かせないのは**連続性**で、平均値の定理ではそれに加えて**微分可能性**が要ります。上の定理は、次の形で覚えておくこともできます。

> **中間値の定理（値の形）**
>
> $a < b$とする。関数$f(x)$が閉区間$[a,\, b]$で連続ならば、$f(a)$と$f(b)$の間にあるどの値kに対しても、$f(c) = k$となるcが$a \leqq c \leqq b$の範囲にある。

両端の値の「中間」にある値はすべて取る、というのが名前の意味です。$k = 0$とし、$f(a)$と$f(b)$の符号が違う場合に当てはめると、最初の形になります。

1　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。