斜回転体の3つの解法

解説　高2数学・積分

授業で扱った問題は、$y=x$ と $y=x^n$ が囲む部分を $y=x$ を軸として回した立体について、その体積を3通りの方法で計算する問題でした。回転軸が座標軸でなく斜めの直線である回転体を**斜回転体**といいます。

この頁では、授業の問題とは別の図形を使って3つの解法をもう一度たどり、それぞれで何に気をつけるかを整理します。使う図形は次のものです。

この頁の題材

放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ と直線 $y=x$ が囲む部分（$0 \leqq x \leqq 2$）を、直線 $y=x$ を軸として1回転させる。この立体の体積 V を求めよ。

$0 \leqq x \leqq 2$ では $x-\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{1}{2}x(2-x) \geqq 0$ なので、図形はつねに回転軸の下側にあり、両端 $x=0,\ 2$ で軸に接しています。答えは3つの解法のどれでも

$$V=\frac{2\sqrt{2}}{15}\pi$$

になります。

1. 3つの解法の考え方と使い分け

回転体の体積は、立体を薄い板に切り分けて足し合わせる（積分する）ことで求めます。斜回転体で違いが出るのは「どの向きに切るか」です。

3つの切り方

解法1　回転軸に垂直に切る。切り口は円なので、立体は回転軸に沿って並んだ薄い円板の集まりになる。軸に沿った座標で積分する。

解法2　x 軸に垂直に切る（傘型近似）。図形を縦の細い帯に分け、帯1本を回した傘のような形の体積を円柱で近似して、x で積分する。

解法3　図形ごと回して軸を x 軸に重ねる。回転移動で斜めの軸を x 軸に移し、ふつうの回転体として積分する。

3つの解法は、手間のかかる場所がそれぞれ違います。

- 解法1は、円板の半径（点と直線の距離）と厚み（軸に沿った長さ）を両方とも自分で出す必要があり、計算が重くなりがちです。そのかわり考え方が回転体の定義に最も近く、入試で小問の誘導がつく場合はこの流れになることが多いので（2020年の東京工業大学 第4問は、曲線 $y=\sin x$ の一部を直線 $x+y=0$ のまわりに回す問題で、回転軸に垂直な切り口の面積を先に求めさせる誘導がついていました）、全員が一度は自力で最後まで解けるようにしておきます。
- 解法2は、積分が x の多項式だけで済むので最も軽い計算です。結果を確かめる検算にも使えます。ただし答案で使うときは、どういう近似をしたのかを言葉で説明する必要があります（4節）。
- 解法3は、回転移動さえできればあとは見慣れた回転体の計算です。ただし軸の傾きが 45° や 30° のような角でないと、回転の式が重くなります。また曲線の式の扱いに注意が要ります（5節）。

まずは解法1と解法2の両方で題材を解き、答えが一致することを確かめてみてください。

2. 点と直線の距離

解法1では、曲線上の点から回転軸までの距離が円板の半径になります。その道具が点と直線の距離の公式です。数学Ⅱで学んだきり、しばらく使っていなかった人も多いと思うので確認しておきます。

> **点と直線の距離**
>
> 点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は
>
> $$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

題材では、放物線上の点 $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ と直線 $x-y=0$ の距離が

$$\frac{\left|t-\frac{1}{2}t^2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{t-\frac{1}{2}t^2}{\sqrt{2}} \qquad (0\leqq t\leqq 2)$$

です。$0\leqq t\leqq 2$ では中身が 0 以上なので、絶対値はそのまま外せます。

この公式は、2直線のなす角の二等分線を求めるときにも使います。二等分線は「2直線から等しい距離にある点の集まり」なので、距離の式を等号で結んで絶対値を外せば求まります。たとえば2直線 $3x-4y+2=0$ と $4x+3y-1=0$ では、分母がどちらも $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$ なので

$$\begin{aligned} &|3x-4y+2|=|4x+3y-1| \\ \iff\ &3x-4y+2=\pm(4x+3y-1) \end{aligned}$$

となり、二等分線は $x+7y-3=0$ と $7x-y+1=0$ の2本です。絶対値を外すと $\pm$ の2通りが出るので、二等分線はいつも2本あり、その2本は互いに直交します[1]（この例でも法線ベクトル $(1,\,7)$ と $(7,\,-1)$ の内積は 0 です）。

3. 解法1：厚みは軸に沿って測る

曲線上の点を $\mathrm{P}\left(t,\,\dfrac{1}{2}t^2\right)$ とし、P を通って軸 $y=x$ に垂直な直線が軸と交わる点を Q、線分 OQ の長さを X とおきます。P を通り軸に垂直な直線で立体を切ると、切り口は半径 $\mathrm{PQ}=\dfrac{t-\frac{1}{2}t^2}{\sqrt{2}}$ の円です。この円板を X について積分すれば体積が出ます。

$$V=\int \pi\,\mathrm{PQ}^2\,dX$$

ここで X と t の関係を出します。P を通り軸に垂直な直線は $x+y=t+\dfrac{1}{2}t^2$ で、これと $y=x$ の交点が Q なので

$$\mathrm{Q}\left(\frac{t+\frac{1}{2}t^2}{2},\,\frac{t+\frac{1}{2}t^2}{2}\right),$$
$$X=\mathrm{OQ}=\frac{t+\frac{1}{2}t^2}{\sqrt{2}}$$

です。t が 0 から 2 まで増えると X は 0 から $2\sqrt{2}$ まで増え続けるので、t に置換できます。$\dfrac{dX}{dt}=\dfrac{1+t}{\sqrt{2}}$ より

$$\begin{aligned}V&=\int_0^2 \pi\left(\frac{t-\frac{1}{2}t^2}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1+t}{\sqrt{2}}\,dt\\&=\frac{2\sqrt{2}}{15}\pi\end{aligned}$$

となります。

よくある取り違え：dX を $\sqrt{2}\,dt$ にしてしまう

傘型近似（4節）を学んだあとで解法1を書くと、厚み dX のところに $\sqrt{2}\,dt$ と書いてしまう誤りがよく起きます。

$$\text{誤り：}\ V=\int_0^2 \pi\left(\frac{t-\frac{1}{2}t^2}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\sqrt{2}\,dt$$

図1で2つの長さを比べます。

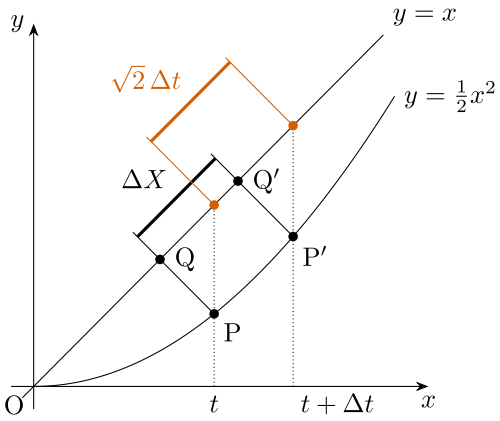


図1　放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と回転軸 $y=x$。P と P′ から軸へ下ろした垂線の足 Q、Q′ の間が ΔX（黒の太線）、直線 $x=t$、$x=t+\Delta t$ が軸を切る2点の間が $\sqrt{2}\,\Delta t$（朱の太線）で、2つは別の長さ

t を Δt だけ増やすと、点は P′ に移り、垂線の足は Q′ に移ります。Q と Q′ の間の長さが本当の厚み ΔX で、上の式から $\Delta X \fallingdotseq \dfrac{1+t}{\sqrt{2}}\Delta t$ です。一方 $\sqrt{2}\,\Delta t$ は、縦の直線 $x=t$、$x=t+\Delta t$ と軸との交点 $(t,\,t)$、$(t+\Delta t,\,t+\Delta t)$ どうしの距離です。図で見ると、2つは別の線分の長さです。縦に切るのは解法2の切り方で、解法1は軸に垂直に切っているので、厚みは軸に垂直な切り口どうしの間隔 ΔX でなければなりません。

> **誤った式でも答えが合ってしまうことがある**
>
> 上の誤った式を実際に計算すると、$\dfrac{2\sqrt{2}}{15}\pi$ という正しい値が出ます。これは、誤った式の中身が4節の傘型近似の式 $\pi\cos\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)^2dx$ と同じもの（文字が t か x かだけの違い）だからです。被積分関数どうしの差を $h=t-\dfrac{1}{2}t^2$ で書くと $-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}h^2h'$ となり、積分すると h^3 の両端での値の差になります。題材では両端 $t=0,\,2$ で $h=0$ なので、差がちょうど消えます。
>
> ところが、たとえば「$0\leqq t\leqq 1$ の部分だけ」のように、端で図形が回転軸に届いていない場合は事情が変わります。解法1の正しい式は点 $\mathrm{P}(1,\,\frac{1}{2})$ を通り軸に垂直な直線で切った立体の体積 $\dfrac{9\sqrt{2}}{160}\pi$ を、誤った式は縦の直線 $x=1$ で切った立体の体積 $\dfrac{\sqrt{2}}{15}\pi$ を計算していて、値が食い違います。答えが合ったからといって式が正しいとは限らないので、「どの向きに切ったか」と「厚みをどこで測ったか」が対応しているかを、毎回確かめてください。

4. 解法2：傘型近似と一般の公式

解法2では、図形を x 軸に垂直な細い帯に分けます。x から $x+\Delta x$ までの帯は、縦の長さ h（曲線と軸の縦の差）、横幅 Δx のほぼ平行四辺形です。これを回すと、傘の骨組みのような円錐面に厚みがついた形になります。この体積を、計算しやすい円柱に置き換えるのが傘型近似です。

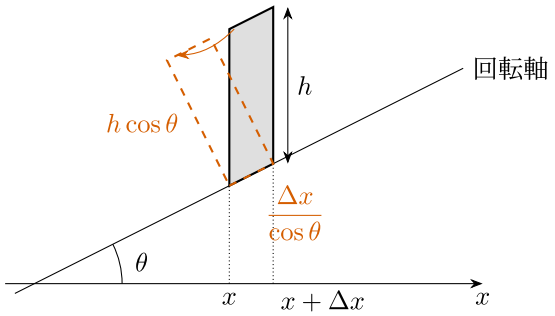


図2　傾き角 θ の回転軸の上の縦長の帯（縦 h、横幅 Δx）。軸に平行にずらすと、辺の長さが $h\cos\theta$ と $\frac{\Delta x}{\cos\theta}$ の長方形（朱の破線）になる

置き換えの理由は次のとおりです。帯の各点を**回転軸に平行に**ずらしても、各点の軸からの距離は変わりません。回すと各点は同じ半径の円を描くので、薄い帯を回してできる立体の体積は、このずらしで変わらないと考えてよいのです。図2のように帯を軸に平行にずらして、軸に垂直な辺をもつ長方形に直すと、

- 軸に垂直な辺の長さは、縦の長さ h に $\cos\theta$ を掛けた $h\cos\theta$（θ は軸が x 軸の正の向きとなす角）
- 軸に沿った辺の長さは $\dfrac{\Delta x}{\cos\theta}$（$x$ 方向に Δx 進むと、軸の上では $\dfrac{\Delta x}{\cos\theta}$ 進む）

になります（面積は $h\cos\theta\cdot\dfrac{\Delta x}{\cos\theta}=h\,\Delta x$ で、もとの帯と同じです）。この長方形を回すと、半径 $h\cos\theta$、高さ $\dfrac{\Delta x}{\cos\theta}$ の円柱になり、体積は

$$\pi(h\cos\theta)^2\cdot\frac{\Delta x}{\cos\theta}=\pi\cos\theta\cdot h^2\,\Delta x$$

です。これを x について足し合わせると、次の式が得られます。

傘型近似の公式

直線 $y=mx+k$ が x 軸の正の向きとなす角を θ（$\tan\theta=m$、$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$）とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=mx+k$ に挟まれ、両端を直線 $x=a$、$x=b$ で切った部分を、直線 $y=mx+k$ のまわりに回してできる立体の体積は

$$V=\pi\cos\theta\int_a^b\{f(x)-(mx+k)\}^2\,dx$$

ただし、$a\leqq x\leqq b$ で $f(x)-(mx+k)$ の符号が変わらない（図形が回転軸をまたがない）ものとする。

符号一定の条件が要るのは、図形が軸の両側にあると、軸の上側の部分と下側の部分を回した立体どうしが重なることがあり、帯ごとの体積を足すとその重なりを二重に数えてしまうからです。

題材では $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ なので、

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right)^2 dx \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{15} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{15}\pi
\end{aligned}
$$

と、解法1よりずっと短い計算で同じ値が出ます。軸の傾きが有名な角でなくても使えるのがこの公式の強みで、たとえば $y = x^2$ と $y = 2x$ が囲む部分を、$y = 2x$ を軸として回すなら、$\tan\theta = 2$ から $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ で

$$
V = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \int_0^2 (2x - x^2)^2 \, dx = \frac{16}{15\sqrt{5}}\pi
$$

となります。

ただし、この公式は教科書に載っている定理ではありません。答案でいきなり使うのではなく、帯を円柱に置き換える上の説明を書いてから使うか、解法1・解法3で解いた結果の検算や、時間が足りないときに値だけを出す用途にとどめるのが安全です。

5. 解法3：回すのは媒介変数で表した点

解法3では、図形を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転して、軸 $y = x$ を x 軸に重ねます。点の回転は複素数平面で考えると見通しよく書けます。

曲線の式に逆変換を代入するとどうなるか

曲線を回すときの原則は「回した後の点 $(X,\, Y)$ を逆に回して元の点 $(x,\, y)$ に戻し、それを元の曲線の式に代入する」でした。今の場合、元の点は $(X,\, Y)$ を $+\dfrac{\pi}{4}$ 回した点なので

$$
\begin{aligned}
x + yi &= (X + Yi)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right) \quad \text{より} \\
x &= \frac{X - Y}{\sqrt{2}}, \\
y &= \frac{X + Y}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

です。これを $y = \dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$
\frac{X + Y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{X - Y}{\sqrt{2}} \right)^2
$$

となり、Y についての2次方程式になります。解の公式で $Y=(X\text{の式})$ に直すことはできますが、式に根号が入って重くなり、さらにその2乗を積分するのは大変です。授業の問題のように曲線が $y=x^n$ なら Y の n 次方程式になり、一般の n では Y について解けません。

媒介変数で表してから回す

そこで、曲線上の点を $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ と媒介変数で表し、その点を $-\dfrac{\pi}{4}$ 回します。

$$\left(t+\frac{1}{2}t^2\,i\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{t+\frac{1}{2}t^2}{\sqrt{2}}+\frac{\frac{1}{2}t^2-t}{\sqrt{2}}\,i$$

回した後の点を $(u,\ v)$ とすると $u=\dfrac{t+\frac{1}{2}t^2}{\sqrt{2}}$、$v=\dfrac{\frac{1}{2}t^2-t}{\sqrt{2}}$ で、t が 0 から 2 まで動くと u は 0 から $2\sqrt{2}$ まで増え続けます。x 軸のまわりの回転体なので

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{2\sqrt{2}}\pi v^2\,du\\&=\int_0^2\pi\left(\frac{\frac{1}{2}t^2-t}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1+t}{\sqrt{2}}\,dt\\&=\frac{2\sqrt{2}}{15}\pi\end{aligned}$$

となります。最後の積分は解法1とまったく同じ式です。解法1で求めた X と半径が、回した後の u と $|v|$ にそのまま対応しているからです。

逆変換の代入が向いている場合

逆に、曲線の式が x, y の2次式で、xy の項を含むような場合は、逆変換を代入すると式がきれいにまとまることがあります。たとえば曲線 $x^2-2xy+y^2-\sqrt{2}(x+y)=0$ では、$x-y=-\sqrt{2}\,Y$、$x+y=\sqrt{2}\,X$ を代入すると

$$2Y^2-2X=0\quad\text{つまり}\quad X=Y^2$$

となり、この曲線を $-\dfrac{\pi}{4}$ 回すとなじみのある放物線になることが分かります。授業でも、xy の項を含む2次曲線を回して式を求める問題を扱いました。曲線が媒介変数で表しやすいか、式のまま代入して整理しやすいかで、使う方法を選びます。

1　与えられた2直線について、長さ 1 の法線ベクトルを $\vec{p}$, $\vec{q}$ とします。二等分線の式は、2直線の式をそれぞれ $\sqrt{a^2+b^2}$ で割ったものの和と差なので、その法線は $\vec{p}+\vec{q}$ と $\vec{p}-\vec{q}$ の向きです。$(\vec{p}+\vec{q})\cdot(\vec{p}-\vec{q})=|\vec{p}|^2-|\vec{q}|^2=1-1=0$ なので、2本は直交します。

塾の授業で配った補足資料をもとに書き直しました。