パップス・ギュルダンの定理

発展　高2数学・積分

平面図形を直線のまわりに1回転させた立体の体積は、ふつうは断面積を積分して求めます。ところが図形の**面積**と**重心の位置**が分かっていれば、積分をせずに掛け算1回で体積が出ます。そのことを保証するのがパップス・ギュルダンの定理です。

この定理は高校の教科書の範囲外で、答案の中で使うと証明していない結果を引用したことになります。答案では積分で体積を計算し、定理のほうは見当づけや検算に使いましょう。

1. 定理の内容

パップス・ギュルダンの定理

平面上に直線 l と図形 A があり、A は l の片側にある（l に接していてもよいが、l をまたがない）とする。A の面積を S、A の重心 G と l との距離を r とすると、A を l のまわりに1回転させてできる立体の体積 V は

$$V = S \times 2\pi r$$

である。$2\pi r$ は、重心 G が1回転するときに描く円の周の長さである。

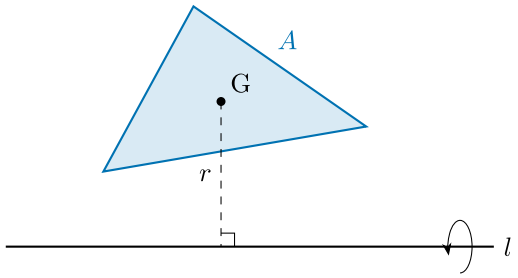


図1　図形 A を直線 l のまわりに回す。体積に関係するのは A の面積と、重心 G から l までの距離 r だけである

ここで「重心」とは、図形 A を厚さと密度がどこも同じ薄い板とみなしたときに、その板がつり合う点のことです。三角形なら3頂点の座標の平均がこの点になります。一般の図形では、l を x 軸にとって A を $y \geqq 0$ の側に置くと、G と l の距離は

$$r = \frac{1}{S}\iint_A y\,dx\,dy$$

で定めます。右辺は「A の各点の高さ y を、面積の重みで平均したもの」です。

なぜ成り立つのか

A を、面積 ΔS の小さなかけらに細かく分けます。l から高さ y の所にあるかけらを l のまわりに回すと、半径 y の円に沿った細い輪ができます。輪の断面積は ΔS、輪の周の長さは $2\pi y$ なので、輪の体積はおよそ $2\pi y\,\Delta S$ です（バウムクーヘン法では薄い筒を切り開いて薄い板とみなしました。それと同じ考え方です）。

A が l の片側にあれば、違うかけらから生まれた輪どうしは重なりません。立体はこれらの輪ですき間なく埋まるので、輪の体積を全部足すと

$$\begin{aligned} V &= \iint_A 2\pi y \, dx\, dy \\ &= 2\pi \cdot \iint_A y \, dx\, dy = 2\pi \cdot rS \end{aligned}$$

となります。最後の等号で、上の r の定義を使いました。

A が l をまたぐと、l の上側のかけらと下側のかけらが同じ場所に輪を作ることがあり、その部分は立体としては1回しか数えないのに、上の和では2回数えてしまいます。片側という条件はこのために必要です。

定理の式には図形の形そのものが入っていません。したがって、面積と重心の高さが同じなら、図形を平面の中でどう回したりずらしたりしても（l の片側にある限り）回転体の体積は同じになります。

2. 例：トーラスの体積

円を、その円と交わらない直線のまわりに回してできるドーナツ形の立体を**トーラス**といいます。

例

xy 平面で、中心 C$(0,\, R)$、半径 ρ の円（内部も含む）を x 軸のまわりに1回転させる。$R > \rho$ なので、円は x 軸と交わらない。

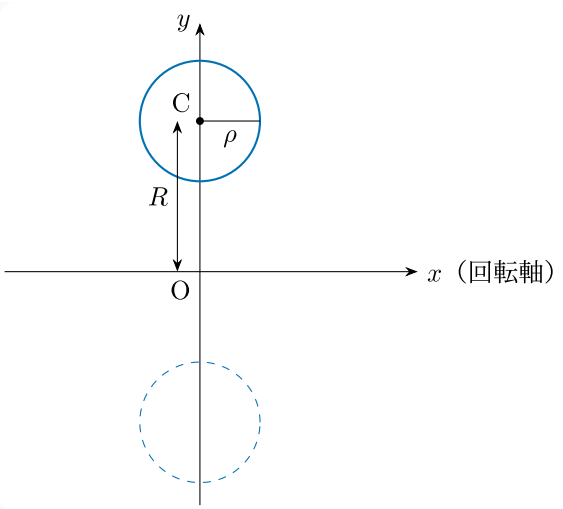


図2　x 軸を回転軸とし、中心 C$(0,\,R)$、半径 ρ の円を回す。点線の円は、半回転したときの位置

円の面積は $\pi\rho^2$、円の重心は中心 C なので、重心と回転軸の距離は R である。定理より

$$V = \pi\rho^2 \times 2\pi R = \boldsymbol{2\pi^2 R\rho^2}$$

この値を積分でも確かめておきます。x 軸に垂直な平面 $x = t$（$-\rho \leqq t \leqq \rho$）で立体を切ると、断面は内側の半径 $R - \sqrt{\rho^2 - t^2}$、外側の半径 $R + \sqrt{\rho^2 - t^2}$ の円環で、その面積は

$$\pi\left\{\left(R + \sqrt{\rho^2 - t^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{\rho^2 - t^2}\right)^2\right\} = 4\pi R\sqrt{\rho^2 - t^2}$$

です。$\displaystyle\int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2 - t^2}\,dt$ は半径 ρ の半円の面積 $\dfrac{\pi\rho^2}{2}$ なので、$V = 4\pi R \cdot \dfrac{\pi\rho^2}{2} = 2\pi^2 R\rho^2$ となり、定理の値と一致します。

3. 逆に使って重心の位置を求める

回転体の体積を別の方法で知っていれば、定理の式を r について解くことで、重心と l の距離が分かります。

まず答えの分かっている図形で確かめる　直角をはさむ2辺の長さが h、k の直角三角形を、長さ h の辺を l に重ねて置きます。l のまわりに回すと、底面の半径 k、高さ h の円錐ができ、体積は $\dfrac{1}{3}\pi k^2 h$ です。面積は $\dfrac{1}{2}hk$ なので

$$r = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{1}{3}\pi k^2 h}{2\pi \cdot \frac{1}{2}hk} = \frac{k}{3}$$

となります。3頂点の高さは $0,\,0,\,k$ で、その平均 $\dfrac{k}{3}$ と一致しています。

例：半円の重心

半径 r の半円の重心 G は、対称性から、直径の中点 O を通り直径に垂直な直線の上にある。O から G までの距離 d を求める。

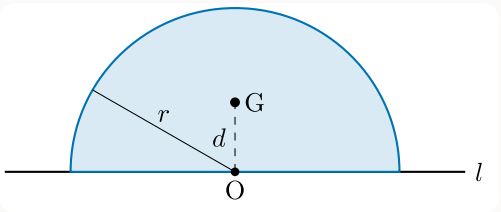


図3　直線 l 上に直径を置いた半径 r の半円。直径の中点 O から距離 d の所に重心 G がある

直径を l に重ねて半円を l のまわりに回すと、半径 r の球になる。球の体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$、半円の面積は $\frac{1}{2}\pi r^2$ なので、定理より

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2 \times 2\pi d \qquad \therefore\ d = \frac{4r}{3\pi}$$

$\frac{4}{3\pi} \fallingdotseq 0.42$ なので、G は O から半径の4割ほど弧の側にあります。半円は直径の近くほど幅が広いので、重心は半径の半分より直径に近い側に来ます。

練習　同じ方法で、次の図形の重心を求めてみましょう。回転軸を2通りにとると、重心の座標が1つずつ求まります。

1. 不等式 $0 \leqq x \leqq 1$、$0 \leqq y \leqq x^2$ が表す領域（x 軸のまわりと y 軸のまわりに回す）
2. 半径 r の円を4等分した扇形（中心角 $\frac{\pi}{2}$）。片方の半径を軸にして回すと半球になることを使う
3. 半径 r、中心角 θ（$0 < \theta \leqq \pi$）の扇形。半径の片方を l に重ねて回してできる立体は、球の一部から円錐を取り除いた形で、体積は $\frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\theta)$

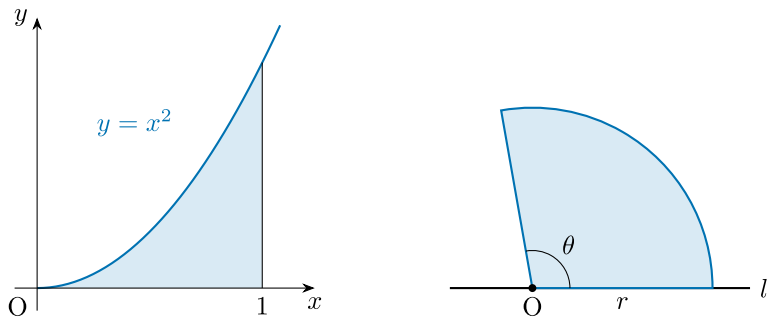


図4　左が練習1の領域、右が練習3の扇形

扇形の答えが出たら、$\theta = \pi$ で半円の結果に戻ること、θ を 0 に近づけると扇形は頂角のとても小さい二等辺三角形に近くなり、O から重心までの距離が $\frac{2}{3}r$ に近づくことも確かめてみましょう。

練習の答え（自分で求めてから開く）

- 練習1：面積 $\frac{1}{3}$。x 軸のまわりの体積 $\frac{\pi}{5}$、y 軸のまわりの体積 $\frac{\pi}{2}$ から、重心は $\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{10}\right)$。
- 練習2：扇形の2本の半径それぞれからの距離が $\frac{4r}{3\pi}$。片方の半径を l に重ねて回すと半球（体積 $\frac{2}{3}\pi r^3$）になり、面積 $\frac{1}{4}\pi r^2$ から距離 $\frac{4r}{3\pi}$ が出る。対称性から、もう1本の半径からの距離も同じ。
- 練習3：l に重ねた半径からの距離は $\frac{2r(1-\cos\theta)}{3\theta}$。重心は中心角の二等分線上にあり、中心 O からの距離は $\frac{4r\sin\frac{\theta}{2}}{3\theta}$。

4. 傘型近似の帯を定理で見直す

授業では、斜めの直線を回転軸にして、その直線と曲線で囲まれた部分を回す問題を扱いました（斜回転体の頁）。そこで使った「傘型近似」は、x 軸に垂直に切った幅 Δx、長さ h の細い帯を1本ずつ回し、その体積を $\pi\cos\theta\, h^2\,\Delta x$（$\theta$ は回転軸と x 軸のなす角）とするものでした。

この式は、パップス・ギュルダンの定理からも出せます。帯は一端が回転軸に接していて、軸の片側にあります。帯の面積は $h\,\Delta x$ です。帯の上で軸から縦方向に s 離れた点と、回転軸との距離は $s\cos\theta$ です。帯の重心は縦方向に $\frac{h}{2}$ の所にあるので、重心と回転軸との距離は $\frac{h}{2}\cos\theta$ になります。定理より、帯を回してできる立体の体積は

$$h\,\Delta x \times 2\pi \cdot \frac{h}{2}\cos\theta = \pi\cos\theta\, h^2\,\Delta x$$

となり、等積変形で出した式と同じになります。

塾の授業で配った補足資料をもとに書き直しました。