√の差の有理化と、長さか角度か

解説　高2数学・微分

この頁は、授業で扱った問題（沖の島から小船で岸へ渡り、岸沿いを歩いて目的地へ向かうときの最短時間を求める問題[1]）の補足です。まず設定と結論を確認しておきます。

島 A から海岸へ下ろした垂線の足を B とし、$\mathrm{AB}=a$ とします。目的地 C は海岸上にあり $\mathrm{BC}=b$ です。船の速さは時速 3 km、歩く速さは時速 5 km で、上陸地点 P を $\mathrm{BP}=x$ の位置に選ぶと、かかる時間は

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{3}+\frac{b-x}{5}\qquad(0\leqq x\leqq b)$$

です。微分すると

$$\begin{aligned}T'(x)&=\frac{x}{3\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{1}{5}\\&=\frac{5x-3\sqrt{x^2+a^2}}{15\sqrt{x^2+a^2}}\end{aligned}$$

となり、分子が 0 になるのは $x=\dfrac{3}{4}a$ のときだけです。この点が区間 $0\leqq x\leqq b$ の中にあるかどうかで答えが分かれ、$b>\dfrac{3}{4}a$ なら B から $\dfrac{3}{4}a$ の点に、$b\leqq\dfrac{3}{4}a$ なら C に直接上陸するのが最も速い、というのが結論でした。以下では、この解答の途中で軽く流した点を一つずつ掘り下げます。

1. 上陸地点を B と C の間に限ってよい理由

解答では最初から $0\leqq x\leqq b$ としました。B より左（C と反対側）や C より右に上陸する可能性を捨ててよいのは、そうした地点には必ず「それより速い区間内の地点」が見つかるからです。

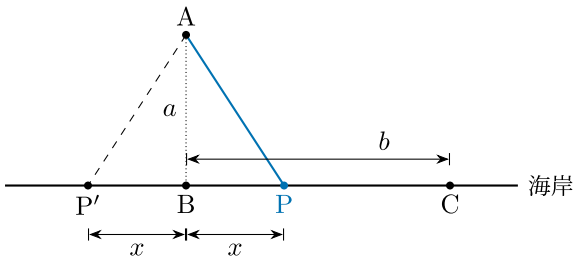


図1　B の左の上陸点 P′ と、B について対称な点 P

B の左に距離 x だけ離れた点 P′ に上陸したとします。B について P′ と対称な点 P を考えると、AB が海岸に垂直なので $\mathrm{AP'}=\mathrm{AP}$ で、船に乗っている時間は等しくなります。ところが上陸後に歩く距離は、P′ からなら $b+x$、P からなら $|b-x|$ で、後者のほうが短い。したがって P′ は P に負けます。

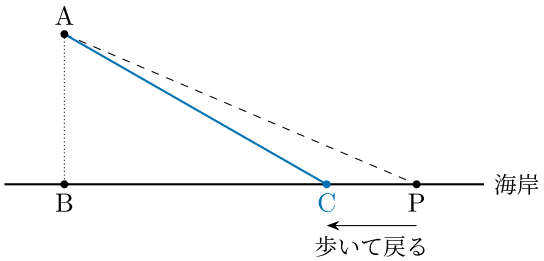


図2　C を越えた点 P に上陸して歩いて戻る場合と、C に直接上陸する場合

C を越えた点 P に上陸する場合は、C に直接上陸する場合と比べます。B から遠い点ほど A からも遠いので AC < AP で、船の時間は C のほうが短い。しかも C に上陸すれば歩く必要がありません。こちらも区間内の点 C に負けます。

どちらの比較も、「船の距離」と「歩く距離」の両方で同時に勝つ相手を見つけているので、速さ 3, 5 の値には関係なく成り立ちます。

2. 角度を変数にとる解き方

同じ問題を、長さ x でなく角度で解くこともできます。この方針をとった人は、以下の流れと自分の答案を比べてください。

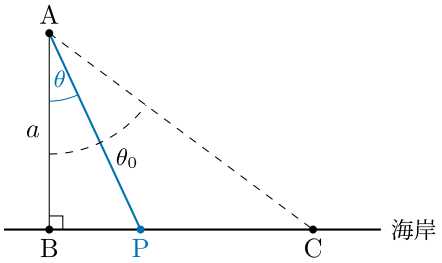


図3　A での角 $\theta = \angle\mathrm{BAP}$ と $\theta_0 = \angle\mathrm{BAC}$

$\theta = \angle\mathrm{BAP}$ とおきます。P が B から C まで動くと θ は 0 から $\theta_0 = \angle\mathrm{BAC}$ まで動くので、変域は $0 \leqq \theta \leqq \theta_0$（ただし $\tan\theta_0 = \dfrac{b}{a}$）です。直角三角形 ABP から $\mathrm{AP} = \dfrac{a}{\cos\theta}$、$\mathrm{BP} = a\tan\theta$ なので、かかる時間は

$$T(\theta) = \frac{a}{3\cos\theta} + \frac{b - a\tan\theta}{5}$$

です。これを微分して整理すると

$$T'(\theta) = \frac{a\,(5\sin\theta - 3)}{15\cos^2\theta}$$

となり、符号は $\sin\theta - \dfrac{3}{5}$ だけで決まります。$\sin\theta_1 = \dfrac{3}{5}$ となる角 θ_1（$0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$）を境に T は減少から増加に変わります。$\cos\theta_1 = \dfrac{4}{5}$、$\tan\theta_1 = \dfrac{3}{4}$ なので、これは $x = a\tan\theta_1 = \dfrac{3}{4}a$ に当たります。

微分を使わない見方もあります。$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を使って通分すると

$$T(\theta) = \frac{b}{5} + \frac{a}{5}\cdot\frac{\frac{5}{3} - \sin\theta}{\cos\theta}$$

と書けます。$\dfrac{\sin\theta - \frac{5}{3}}{\cos\theta - 0}$ は、点 $\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$ と単位円上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を結ぶ直線の傾きです。傾きは負なので、$\dfrac{\frac{5}{3} - \sin\theta}{\cos\theta}$ はその直線の傾きの大きさ（急さ）を表します。

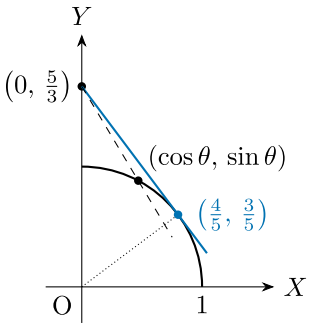


図4　点 $\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$ から単位円の四分円へ引いた直線。最もゆるやかになるのは接点 $\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ を通るとき

点 $\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$ から四分円上の点へ引いた直線が最もゆるやかになるのは、直線が円に接するときです。接点では半径と直線が直交するので、原点 O・接点 T・点 D $\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$ は斜辺 OD $= \frac{5}{3}$、OT $= 1$（半径）の直角三角形を作ります。$\cos\angle\mathrm{DOT} = \dfrac{1}{5/3} = \dfrac{3}{5}$ で、この角は Y 軸から測った角なので、T の Y 座標は $\dfrac{3}{5}$ です。つまり接点は $\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ で、$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ の点です。$\theta_0 \geqq \theta_1$ ならこの接点が変域に入り、$\theta_0 < \theta_1$ なら変域の右端 θ_0（C に上陸）が最も速くなります。どの方法で解いても、極値の点が変域に入るかどうかの場合分けは避けられません。

3. 「分子の有理化」が使えるのはいつか

$\sqrt{\ } - \sqrt{\ }$ の符号の調べ方

$A \geqq 0,\ B \geqq 0$（ただし $A,\ B$ が同時に 0 ではない）のとき

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

で、右辺の分母は正なので、$\sqrt{A} - \sqrt{B}$ の符号は $A - B$ の符号と一致する。

授業で扱った問題の $T'(x)$ の分子 $5x - 3\sqrt{x^2 + a^2}$ もこの形に直せます。ただしそれは、$x \geqq 0$ なので $5x = \sqrt{25x^2}$ と書けるからです。$3\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{9x^2 + 9a^2}$ と合わせると

$$5x - 3\sqrt{x^2+a^2} = \frac{16x^2 - 9a^2}{5x + 3\sqrt{x^2+a^2}}$$

となって、符号は $16x^2 - 9a^2$ で決まります。x が負になりうる場面でこの手順を機械的にまねると、次のような誤りに陥ります。関数

$$f(x) = 2x + \sqrt{5 - x^2} \qquad (-\sqrt{5} \leqq x \leqq \sqrt{5})$$

の増減を調べる場合で見てみましょう。

×よくある誤り×

$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{5-x^2} - x}{\sqrt{5-x^2}} \qquad \cdots (\mathrm{i}) \end{aligned}$$

分子を有理化して

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5-x^2} - x &= \frac{4(5-x^2) - x^2}{2\sqrt{5-x^2} + x} \\ &= \frac{5(4-x^2)}{2\sqrt{5-x^2} + x} \qquad \cdots (\mathrm{ii}) \end{aligned}$$

「分母は正」とみなすと、$f'(x)$ の符号は $4 - x^2$ の符号となり、$x = -2$ で極小、$x = 2$ で極大……

崩れているのは(ii) の「分母は正」の部分です。$2\sqrt{5-x^2} + x$ が正だと言えるのは $x \geqq 0$ のときだけで、$x < 0$ では正とは限りません。実際、$x = -2$ を代入すると $2 \cdot 1 + (-2) = 0$ で分母が 0 になり、(ii) の式は意味を失います（(i) で直接計算すると $f'(-2) = 2 - \dfrac{-2}{1} = 4$ で、0 ではありません）。さらに $-\sqrt{5} < x < -2$ では分母が負です。公式 $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$ で分母が正になるのは足し合わせる2つがどちらも $\sqrt{\ }$ だからで、x を $\sqrt{x^2}$ と書き換えてよいのは $x \geqq 0$ のときに限られます。正しくは $x = 0$ を境に場合を分けます。

正しい議論

(1) $-\sqrt{5} < x < 0$ のとき　(i) の分子は $2\sqrt{5-x^2} > 0$ と $-x > 0$ の和なので正。よって $f'(x) > 0$。

(2) $0 \leqq x < \sqrt{5}$ のとき　(ii) の分母は正なので、$f'(x)$ の符号は $4 - x^2$ の符号に一致し、$x = 2$ を境に正から負へ変わる。

x	$-\sqrt{5}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\sqrt{5}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-2\sqrt{5}$	↗	5	↘	$2\sqrt{5}$

最大値は $f(2) = 5$、最小値は $f(-\sqrt{5}) = -2\sqrt{5}$。

4. 場合分けに自分で気付く

文字定数を含む最大・最小

関数や区間が文字定数を含むときは、極値をとる点が区間の中にあるかどうかで場合分けが起きやすい。

授業で扱った問題で $x = \dfrac{3}{4}a$ と b の大小が問題になったのは、この典型です。以前にも同じ型を扱いました。たとえば $a > 0$ として $f(x) = x - a\log x$ の $1 \leqq x \leqq 2$ での最小値を考えると、$f'(x) = \dfrac{x - a}{x}$ なので極小の点は $x = a$ です。これが区間の左にあるか（$a \leqq 1$、最小値 $f(1) = 1$）、中にあるか（$1 < a < 2$、最小値 $f(a) = a - a\log a$）、右にあるか（$a \geqq 2$、最小値 $f(2) = 2 - a\log 2$）の3通りに分かれます。

ここまでは式から場合分けを見つけました。授業で扱った問題のような図形の問題では、計算を始める前に図から見当をつけることもできます。手がかりになるのは極端な場合です。

(1) a が b よりずっと大きいとき

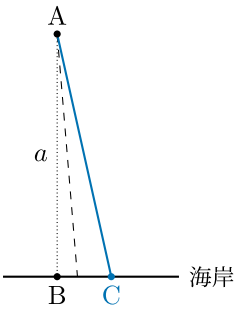


図5　島が沖遠くにあり、目的地 C が B のすぐ近くにある場合

島が沖遠くにあり、C は B のすぐそばです。B と C の間のどこに上陸しても船で進む距離はほぼ a で変わらないので、歩く距離のない C に直接向かうのがよさそうだと分かります。

(2) a が b よりずっと小さいとき

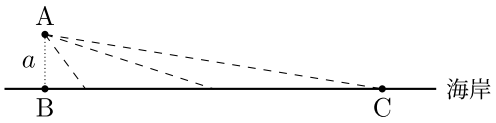


図6　島が岸に近く、目的地 C が遠い場合

島は岸のすぐ近くで、C は遠くにあります。上陸地点を変えると船の距離も歩く距離も大きく変わるので、どこが最適かは計算しないと分かりません。

2つの極端な場合で答えの様子が違う以上、その間のどこかに境目があるはずだ、と予想できます。場合分けを見落とさないためには、

- 動く点をいろいろな位置に置いて図を何枚か描く
- 特に、極端な場合（ある長さが他よりずっと大きい・小さい）を描く

ことを習慣にしてください。

5. 長さを変数にとるか、角度を変数にとるか

ここは少し難しめなので、余力のある人向けです。次の問題を考えます（京大の1994年の入試問題の中心部分を、要点だけに絞って言い直したものです）。

問題

弧の長さが 1 の円弧 PQ を考える。円の半径 r は $2\pi r > 1$ の範囲で自由に変えられる。弧 PQ と弦 PQ で囲まれた部分（弓形）の面積 S が最大になるときの S を求めよ。

半径 r を変数にすると、弦の長さや三角形の面積を r で書くのに苦労します。そこで弧 PQ に対する中心角 θ を変数にとります。弧の長さが $r\theta = 1$ なので $r = \dfrac{1}{\theta}$ で、$2\pi r > 1$ は $0 < \theta < 2\pi$ と同じです。

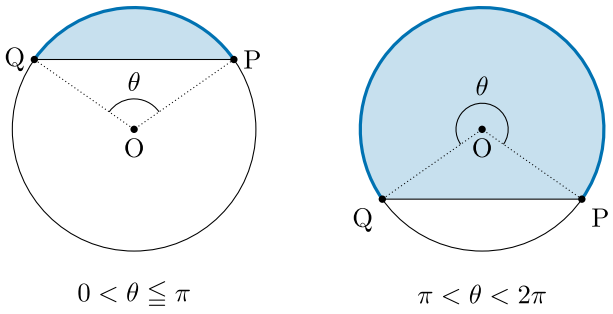


図7　弧の長さ 1 の円弧と弓形。左は中心角 θ が π 以下、右は π を超える場合

弓形は扇形 OPQ と三角形 OPQ の差（$\theta \leqq \pi$）または和（$\theta > \pi$）です。$\theta > \pi$ のとき三角形 OPQ の頂角は $2\pi - \theta$ で、$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$ なので、どちらの場合も

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta = \frac{\theta - \sin\theta}{2\theta^2}$$

という同じ式になります。微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta} &= \frac{\theta^2(1-\cos\theta) - 2\theta(\theta - \sin\theta)}{2\theta^4} \\ &= \frac{2\sin\theta - \theta(1+\cos\theta)}{2\theta^3}\end{aligned}$$

です。分母は正なので、分子 $g(\theta) = 2\sin\theta - \theta(1+\cos\theta)$ の符号を調べます。ここで角度を変数にした場合の定石、「三角関数は積の形にまとめる」を使います。$\varphi = \dfrac{\theta}{2}$（$0 < \varphi < \pi$）とおき、$\sin\theta = 2\sin\varphi\cos\varphi$、$1 + \cos\theta = 2\cos^2\varphi$ を代入すると

$$\begin{aligned}g &= 4\sin\varphi\cos\varphi - 4\varphi\cos^2\varphi \\ &= 4\cos\varphi\,(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\end{aligned}$$

と因数分解できます。後ろの因子 $h(\varphi) = \sin\varphi - \varphi\cos\varphi$ は $h(0) = 0$、$h'(\varphi) = \varphi\sin\varphi > 0$（$0 < \varphi < \pi$）なので、$0 < \varphi < \pi$ でつねに正です。したがって g の符号は $\cos\varphi$ の符号と一致し、$\theta < \pi$ で正、$\theta > \pi$ で負になります。

θ	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	(2π)
$\dfrac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		↗	$\dfrac{1}{2\pi}$	↘	

よって $\theta = \pi$（半円、$r = \dfrac{1}{\pi}$）のとき最大で、最大値は $\boxed{\dfrac{1}{2\pi}}$ です。

この問題から読み取れるのは、

円の一部が出てくる図形では、中心角を変数にとると式が素直になることが多い

ということです。理由は扇形の面積 $\dfrac{1}{2}r^2\theta$ や弧の長さ $r\theta$ に角度そのものが現れることにあります。これを長さだけで書こうとすると、長さから角度を取り出す関数（逆三角関数。高校では扱いません）が必要になり、式にできません。

図形量の最大・最小の進め方

Step 1. 動くもの（長さか角度）を変数にとる
Step 2. 変数の変域を求める

Step 3. 求めたい量を変数で表す
Step 4. Step 2 の範囲で Step 3 の式の最大・最小を調べる（微分・グラフ・不等式など）

ただし、上の問題のように、何を変数にするかは「求めたい量を図形の言葉でどう書くか」を考えて初めて決まることがよくあります。Step 1 だけを先に片付けようとせず、Step 3 と行き来しながら決めてください。

変数を決めたあとの微分の手間にも、長さと角度で違いがあります。

- **長さ**：三平方の定理から $\sqrt{\ }$ が出やすく、$\sqrt{\ }$ を含む式の微分と符号の判定が必要になる
- **角度**：三角関数が出て、微分したあとで $\sin$, $\cos$ を積の形にまとめる作業が必要になる（上の g の因数分解がその例）

長さを選んで $\sqrt{\ }$ が出たときは、微分する**前に**次を試す価値があります。

$\sqrt{\ }$ を含む積の最大・最小

正の因子との積なら、その因子を $\sqrt{\ }$ の中へ入れ、中身の最大・最小を考える。

例として $f(x) = x\sqrt{6 - x^2}$ $(0 < x < \sqrt{6})$ の最大値を求めます。$x > 0$ なので

$$f(x) = \sqrt{x^2(6 - x^2)} = \sqrt{6t - t^2}$$

と書けます（$t = x^2$、$0 < t < 6$）。$\sqrt{\ }$ の中身 $6t - t^2 = 9 - (t - 3)^2$ は $t = 3$ で最大値 9 をとるので、f は $x = \sqrt{3}$ で最大値 3 をとります。微分は一度も使っていません。

微分する前に

1. 符号の分からない部分だけを取り出して微分する
2. $\log$ に掛かっている x の式は、先に割って外せないか考える
3. $\sqrt{\ }$ を含む積は、全部を $\sqrt{\ }$ の中に入れて中身を調べる
4. 入り組んだ式は、まとまりを1文字に置き換える
5. 三角関数の2乗や3乗は、倍角の公式で1次に直してから扱う

一方、積の形にならず $\sqrt{\ }$ どうし（あるいは $\sqrt{\ }$ と正の量）の差が残るときは、§3 の分子の有理化が役に立ちます。

微分したあとに

1. 因数分解して、因子ごとに符号を見られる形にする
2. 因数分解できないときも、符号が明らかな因子から先に片付ける
3. $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ は有理化して $A-B$ の符号を調べる（両方が $\sqrt{\ }$ であることを確かめてから）

1　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。
