漸化式と微分方程式：同じ理論の離散版と連続版

発展読み物「特性方程式と 3 項間漸化式」の詳説（大学教養レベル）　｜　特性方程式・解と係数・重解・虚数解の完全対応

本編で、定数係数の 3 項間漸化式は特性方程式の 2 解 α, β から $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ と解けた。一方、大学で学ぶ定数係数線形微分方程式 $y'' = p\,y' + q\,y$ も、特性方程式 $\lambda^2 = p\lambda + q$ の 2 解から $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$ と解ける。手順が似ているのは偶然ではなく、**両者は同じ線形代数を、数列（離散）と関数（連続）で演じている**。本稿はこの対応を、特性方程式・解と係数の関係・重解・虚数解の各点で突き合わせ、最後に $\alpha = e^{\lambda}$ という橋で両者を直結する。

1. 辞書：何と何が対応するか

先に対応表を掲げる。以降の節はこの表の各行の検証である。

	漸化式（離散）	微分方程式（連続）
未知のもの	数列 a_n	関数 $y(x)$
基本の作用素	ずらし $E\colon a_n \mapsto a_{n+1}$	微分 $D\colon y \mapsto y'$
方程式（2 階）	$a_{n+2} = p\,a_{n+1} + q\,a_n$	$y'' = p\,y' + q\,y$
試すもの	$a_n = \alpha^n$（等比）	$y = e^{\lambda x}$（指数）
特性方程式	$\alpha^2 = p\,\alpha + q$	$\lambda^2 = p\,\lambda + q$
解と係数の関係	$\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = -q$	$\lambda_1 + \lambda_2 = p,\ \lambda_1\lambda_2 = -q$
一般解	$A\,\alpha^n + B\,\beta^n$	$A\,e^{\lambda_1 x} + B\,e^{\lambda_2 x}$
係数の決め方	初期値 a_1, a_2	初期条件 $y(0), y'(0)$
重解	$(A + Bn)\,\alpha^n$	$(A + Bx)\,e^{\lambda x}$
虚数解	$r^n(C\cos n\theta + D\sin n\theta)$	$e^{ax}(C\cos bx + D\sin bx)$
下げる道具	α^n で割る	積分因子 $e^{-\lambda x}$ を掛ける
足し上げ	望遠鏡和（差分の和）	積分

とくに目を引くのは**特性方程式と解と係数の関係が文字どおり同一**なことである。α を λ と書き換える以外に何の違いもない。理由は次節で明らかになる：どちらも**同じ多項式**（特性多項式）の根の話をしているからだ。

2. 作用素の言葉：E と D、そして同じ特性多項式

漸化式を、数列全体に働く**ずらし作用素** E（$Ea_n = a_{n+1}$）で書くと

$$a_{n+2} - p\,a_{n+1} - q\,a_n = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (E^2 - p\,E - q)\,a = 0.$$

微分方程式を**微分作用素** D（$Dy = y'$）で書くと

$$y'' - p\,y' - q\,y = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (D^2 - p\,D - q)\,y = 0.$$

現れた多項式はどちらも**同じ** $t^2 - p\,t - q$ で、代入する文字が E か D かだけが違う。これを**特性多項式**と呼ぶ。2 解を α, β（連続の文脈では λ_1, λ_2）とすれば、多項式の因数分解がそのまま作用素の因数分解になる：

$$E^2 - p\,E - q = (E-\alpha)(E-\beta), \qquad D^2 - p\,D - q = (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)$$

（E, D と定数の掛け算は順序を入れかえてよいので、ふつうの多項式と同じに因数分解できる。展開して確かめれば $(E-\alpha)(E-\beta) = E^2 - (\alpha+\beta)E + \alpha\beta$ で、**解と係数の関係** $\alpha+\beta = p,\ \alpha\beta = -q$ は「この因数分解が成り立つための係数の釣り合い」そのものである）。本編で $a_{n+1} - \alpha a_n$ を等比にする条件として $\alpha+\beta = p,\ \alpha\beta = -q$ が出てきたのは、この作用素の因数分解を成分で書いたものにほかならない：

$$(E-\alpha)\,a = b \text{ とおくと } (E-\beta)\,b = 0, \quad \text{つまり } b_{n+1} = \beta\, b_n \text{ (等比)}.$$

微分方程式でも同型に、$(D-\lambda_1)y = u$ とおけば $(D-\lambda_2)u = 0$、つまり $u' = \lambda_2 u$（指数関数）。**「3 項間を 2 項間に落とす」と「2 階を 1 階に落とす」は、同じ因数分解の一段目**である。

本編§ 7 の 4 項間の計算（α で落とした先の 3 項間の特性方程式が $x^2 - Px - Q = (x-\beta)(x-\gamma)$、すなわち**残りの根がそのまま引き継がれる**）も、この言葉では一行である。3 次の因数分解 $E^3 - pE^2 - qE - r = (E-\alpha)(E-\beta)(E-\gamma)$ の一段目 $(E-\alpha)$ を外した**商** $(E-\beta)(E-\gamma)$ が、b の従う作用素にほかならない。本編で P, Q の連立を解いて $\alpha^3 = p\alpha^2 + q\alpha + r$ を出した計算は、多項式の割り算 $(t^3 - pt^2 - qt - r) \div (t-\alpha)$（割り切れる条件＝剰余の定理で α が根）を成分で実行したことに相当する。

3. 一次に落ちたあと：α^n で割る ＝ 積分因子

因数分解で一段落とすと、残るのはどちらも**非同次の一次**である：

$$a_{n+1} - \alpha\, a_n = C\,\beta^n \qquad \text{と} \qquad y' - \lambda_1 y = C\,e^{\lambda_2 x}.$$

ここからの解き方も対応する。漸化式は**両辺を** α^{n+1} **で割る**（$\alpha\beta = -q$ なので、$q \neq 0$ なら $\alpha \neq 0$ で割れる。以下この前提をおく）：$d_n := a_n/\alpha^n$ とおくと

$$d_{n+1} - d_n = \frac{C}{\alpha}\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^n$$

と**差分が既知の形**になり、n まで足し上げれば（望遠鏡和）d_n が求まる。微分方程式は**積分因子** $e^{-\lambda_1 x}$ **を掛ける**：

$$\big(e^{-\lambda_1 x}\,y\big)' = C\,e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}$$

と**導関数が既知の形**になり、積分すれば y が求まる。「α^n で割る」と「$e^{-\lambda_1 x}$ を掛ける」は同じ変形の離散版・連続版で、「望遠鏡和」と「積分」がそれに続く同じ操作である。

重解で n（と x）が現れる理由

上の計算は $\beta \neq \alpha$ なら等比（指数）の和で閉じ、一般解は $A\alpha^n + B\beta^n$（$Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$）にな

る。ところが**重解** $\beta=\alpha$（$\lambda_2=\lambda_1$）では

$$d_{n+1}-d_n=\frac{C}{\alpha}\ (\text{定数}) \qquad \diagup \qquad \big(e^{-\lambda x}y\big)'=C\ (\text{定数})$$

となる。**定数を足し続ければ等差数列（n の 1 次）、定数を積分すれば x の 1 次**。だから

$$a_n=(A+Bn)\,\alpha^{\,n}, \qquad y=(A+Bx)\,e^{\lambda x}$$

と、重解のときに限って n（x）が顔を出す。本編の例（$a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$ で $c_n=a_n/3^n$ が等差になった[a]）は、この離散版そのものである。

[a] 塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えた。

作用素の言葉でも同じことが一行で言える。恒等式

$$(E-\alpha)\big(\alpha^{\,n}b_n\big)=\alpha^{\,n+1}(b_{n+1}-b_n), \qquad (D-\lambda)\big(e^{\lambda x}u(x)\big)=e^{\lambda x}\,u'(x)$$

により、$\alpha^{\,n}$（$e^{\lambda x}$）をくくり出すと $E-\alpha$ は**差分** $\Delta: b_n\mapsto b_{n+1}-b_n$ に、$D-\lambda$ は**ただの微分**に化ける。よって k 重解の解空間は

$$(E-\alpha)^k a=0 \iff \Delta^k b=0 \iff b_n \text{ は } n \text{ の } k{-}1 \text{ 次以下の多項式}$$

（連続版は $u^{(k)}=0 \Leftrightarrow u$ は x の $k{-}1$ 次以下）となり、k 重解には $\alpha^{\,n}, n\alpha^{\,n}, \dots, n^{\,k-1}\alpha^{\,n}$（$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{\,k-1}e^{\lambda x}$）の k 本が対応する。重解 1 つにつき解が 1 本しか出ない「不足」を、多項式係数がちょうど埋める。

4. なぜ重ね合わせでよいか：線形性と次元

一般解を「基本解の重ね合わせ」と書いてよい理由も、両者共通である。

1. **線形性**：方程式が $(E^2-pE-q)a=0$ の形（未知の定数倍と和だけ）なので、解 a, a' の線形結合 $Aa+Ba'$ も解になる。解の全体は**ベクトル空間**をなす。
2. **次元**：漸化式は初期値 (a_1, a_2) を決めれば解が一意に決まるから解空間は 2 次元。微分方程式も初期条件 $(y(0), y'(0))$ で解が一意（解の存在と一意性定理）だから 2 次元。
3. **基底**：$\alpha^{\,n}$ と $\beta^{\,n}$（重解なら $\alpha^{\,n}$ と $n\alpha^{\,n}$）は 1 次独立な 2 本の解。2 次元空間の 1 次独立な 2 本は**基底**なので、**すべての解**がその重ね合わせで一意に書ける。

微分方程式で 1 次独立性を測る道具が**ロンスキアン** $W(x)=\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$、漸化式での対応物が**カソラティアン** $K(n)=\det\begin{pmatrix} a_n & a_n' \\ a_{n+1} & a_{n+1}' \end{pmatrix}$ である。基本解 $\alpha^{\,n}, \beta^{\,n}$ なら $K(n)=(\alpha\beta)^n(\beta-\alpha)$ で、$\alpha\neq\beta$ かつ $\alpha\beta=-q\neq 0$ のとき 0 でない（$m{-}1$ 本ならヴァンデルモンド行列式になる。本編§ 7 で「大学の線形代数で示せる」と預けた最後の一歩の正体がこれである）。

本編§ 7 が採った初等ルートは、この次元勘定を線形代数の語彙なしで言い換えたものである。「初期値 $m{-}1$ 個で解全体がドミノ式に決まる（帰納法）」が**次元** $\le m{-}1$（初期値への制限写像が単射）を、

「初期値を合わせる連立（ヴァンデルモンド系）が必ず解ける」が**基本解が張る**こと（同じ写像が全射）を、それぞれ担っている。連続側でこの「帰納法」の役を果たすのが、解の存在と一意性定理である。

5. 虚数解：ド・モアブル $=$ オイラーの公式

特性方程式の解が虚数 $\lambda = a \pm bi$ のときの実数解の作り方も対応する。連続側は**オイラーの公式** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ により

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}\, e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

と書き、実部と虚部をとって実基本解 $e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx$ を得る。離散側は本編のとおり、解を極形式 $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に直し、**ド・モアブルの定理**で

$$\alpha^{\,n} = r^{\,n}(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

として実基本解 $r^{\,n}\cos n\theta,\ r^{\,n}\sin n\theta$ を得る。ド・モアブルの定理は「オイラーの公式の整数乗版」$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ にほかならないから、**同じ一つの事実**を使っている。本編の例 3 （$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$、$r = 1,\ \theta = 60°$）の連続版の相方が、単振動 $y'' + y = 0$（$\lambda = \pm i$、$y = C\cos x + D\sin x$）である。実数の範囲では「振動」に見える現象が、複素数まで広げると**ただの等比・指数**になる、という構図も共通である。

6. 橋：$\alpha = e^{\lambda}$、離散は連続のサンプリング

対応表の最後に、両者を直結する等式を置く。指数関数 $y = e^{\lambda x}$ を整数の目盛り $x = n$ で拾う（サンプリングする）と

$$y(n) = e^{\lambda n} = \left(e^{\lambda}\right)^{n} = \alpha^{\,n}, \qquad \alpha := e^{\lambda}$$

となり、**等比数列は指数関数の等間隔サンプルそのもの**である。この対応 $\alpha = e^{\lambda}$ は次を取り換える：

連続（λ の言葉）	離散（$\alpha = e^{\lambda}$ の言葉）
$\lambda = 0$（定数解）	$\alpha = 1$（定数列）
$\mathrm{Re}\,\lambda < 0$（減衰）	$\lvert\alpha\rvert < 1$（絶対値が縮む）
$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$（発散）	$\lvert\alpha\rvert > 1$（絶対値が伸びる）
λ 純虚数（単振動）	$\lvert\alpha\rvert = 1$（回転＝周期・概周期）

本編の例 3 で $|\alpha| = r = 1$ の解が減衰も発散もせず**周期列**になったのは、連続側の「純虚数 λ ＝単振動」の離散版である。逆に、微分を差分で置き換える近似（オイラー法 $y_{n+1} = y_n + h\,\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n$）は、連続の $e^{\lambda h}$ を $1 + h\lambda$ で近似して**漸化式に引き戻す**操作で、数値計算の安定性の議論（$|1 + h\lambda| \le 1$ か）はまさに上の表を使う。微分方程式を計算機で解くとは、**連続の問題を漸化式に翻訳する**ことにほかならない。

まとめ：一つの理論の二つの顔

1. ずらし E と微分 D に**同じ特性多項式** $t^2 - pt - q$ を代入した方程式が、3 項間と 2 階線形。**解と係数の関係はどちらでも同一**で、作用素の因数分解 $(E-\alpha)(E-\beta)$ ／ $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)$ の係数の釣り合いを表す。
2. 因数分解で一次に落とし、α^n **で割る（＝積分因子** $e^{-\lambda x}$**）→ 望遠鏡和（＝積分）**で解く。重解では足す（積分する）ものが定数になり、n（x）の 1 次が生まれる：$(A+Bn)\alpha^n \leftrightarrow (A+Bx)e^{\lambda x}$。$k$ 重解は $\Delta^k b = 0 \leftrightarrow u^{(k)} = 0$ で多項式係数 k 本。
3. 重ね合わせでよい理由は**線形性＋解空間の次元＝階数＋基底**（独立性の判定はカソラティアン ↔ ロンスキアン）。
4. 虚数解の処理は**ド・モアブル ↔ オイラー**で同一。$\alpha = e^{\lambda}$ の橋により、減衰・発散・振動の分類（$|\alpha|$ と $\mathrm{Re}\,\lambda$）まで正確に写り合う。