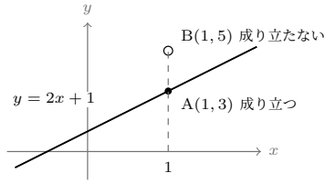
$f(x,y)=k$ とおいて動かすと、なぜ最大・最小が求まるのか

「領域における最大・最小」で使った解法の根拠

授業の問題 1[*1]では、領域 R の中を点が動くときの $x+3y$ の最大値・最小値を、$x+3y=k$ とおいて直線を動かし、R と共有点をもつ k の範囲を読んで求めた。この操作でなぜ最大値・最小値が求まるのかは、中 1 から使ってきた「方程式と図形の関係」から順に説明できる。

1. 方程式を満たす点を集めたものが図形

直線 $y=2x+1$ で考える。この直線の上にある点 $\mathrm{A}(1,3)$ の座標を式に代入すると $3=2\cdot1+1$ となって成り立つ。直線の上にない点 $\mathrm{B}(1,5)$ を代入すると $5\neq2\cdot1+1$ で成り立たない。



この 2 つの結果は、方程式 $y=2x+1$ が表す図形が「x 座標と y 座標がこの式を満たす点を平面上から全部集めた図形」なので起こる。集める条件が式そのものなので、次の言い換えが常に成り立つ。

> 点 P が図形 C 上にある
> $\iff$ P の座標が C の方程式を満たす

矢印は両向きである。左から右は「図形の上の点なら代入して成り立つ」、右から左は「代入して成り立つ点はその図形の上にある」で、後者を忘れやすい。円 $x^2+y^2=25$ なら、この式を満たす点は原点からの距離がすべて 5 になり、円周の外にも内にも現れない。

やってみよう①　オリジナル

円 $x^2+y^2=25$ について、点 $(3,4)$ と点 $(5,1)$ のどちらがこの円の上にあるか。座標を代入して確かめよ。

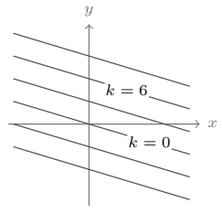
2. $f(x,y)=k$ は「値が k の点」を集めた図形

$f(x,y)=x+3y$ と決めると、平面上のどの点にも、座標を代入して得られる値が 1 つずつ定まる。$(0,0)$ なら 0、$(1,1)$ なら 4、$(6,0)$ なら 6 で、平面のすべての点に $f(x,y)$ の値が 1 つずつ書き込まれていると思えばよい。

値が 6 の点だけを集めると、集める条件が $x+3y=6$ なので、§ 1 のとおり、集まってできる図形は方程式 $x+3y=6$ の表す直線になる。

> $f(x,y)=k$ の表す図形
> $=$ $f(x,y)$ の値が k の点を全部集めたもの

k を 6 から 12 に変えれば、値が 12 の点を集めた別の直線ができる。k をいろいろに変えれば値ごとに直線が 1 本ずつでき、平面上のどの点も、そのうちのどれか 1 本の上にある。



k を動かすとき、1 本の直線が平面上を移動しているのではない。値の違う直線ははじめから全部そこにあり、そのうちどれを見るかを選び直している。授業で「直線を平行移動させる」と言ったのは、この選び直しを図で見せるためである。

3. 共有点があるとはどういうことか

領域 R と図形 $f(x,y)=k$ が共有点 P をもつとき、P は R の点であり、かつ $f(x,y)=k$ の上の点でもある。後半は § 1 により「P の座標を $f(x,y)$ に代入すると k になる」と読み替えられるので、次が成り立つ。

> R と $f(x,y)=k$ が共有点をもつ
> $\iff$ R の中に $f(x,y)$ の値が k の点がある

右側は「k という値は R の中の点で取られる」と読める。逆に共有点が 1 つもなければ、R の中に $f(x,y)$ の値が k である点は 1 つもないので、k は R の上では取られない値になる。この 2 つから、k が取られる値かどうかは共有点があるかどうかで決まる。

この解法の原理

$$\{R \text{ と共有点をもつ } k \text{ の全体}\}$$
$$=\{R \text{ の点で } f(x,y) \text{ が取る値の全体}\}$$

右側が求めたい値域である。その最大が最大値、最小が最小値になる。

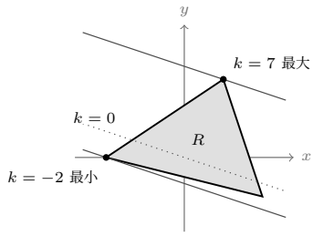
領域の中には点が無限にあるので、1 点ずつ $f(x,y)$ の値を計算して比べることはできないが、共有点があるかどうかなら図を見れば判定できる。

やってみよう②　オリジナル

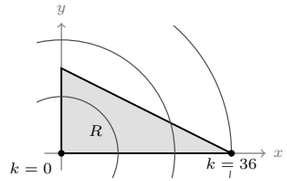
問題 2 の三角形の領域で、$f(x,y)=x^2+y^2$ の値が 49 である点はあるか。半径 7 の円とこの三角形の位置関係から答えよ。

4. 問題で確かめる

問題 1 では $f(x,y)=x+3y$、領域 R は 3 本の直線で囲まれた三角形で、頂点は $(1,2)$、$(2,-1)$、$(-2,0)$ である。$f(x,y)=k$ は傾き $-\frac{1}{3}$ の直線で、y 切片は $\frac{k}{3}$ なので、k が変わると直線は傾きを保ったまま上下する。k を小さい方から選び直すと、三角形と共有点をもつのは $-2\leqq k\leqq 7$ に限られ、その両端が最小値と最大値になる。



問題 2 では $f(x,y)=x^2+y^2$ である。このとき $f(x,y)=k$ は原点を中心とする半径 $\sqrt{k}$ の円になる。$k=0$ は原点だけの 1 点で、k を大きくすると円は膨らむ。円は原点から、最も遠い頂点 $(6,0)$ を通るところまで大きくでき、共有点をもつ k は $0\leqq k\leqq 36$ になる。



等位線が直線から円に変わっても、§ 3 の理屈は変わらない。$f(x,y)=y+x^2$ なら等位線は上に凸な放物線 $y=-x^2+k$ になり、この場合も共有点をもつ k の全体が値域になる。

5. 接するときとは限らない

共有点をもつ k の限界が答えになり、接することはその限界の起こり方の 1 つである。問題 1 のように領域が多角形で等位線が直線なら、限界は等位線が頂点を通るときに起こり、そこでは接していない。境界に円や放物線が含まれるときや、等位線が円や放物線のときは、接する位置で限界になることがある。領域の形によってどちらが起こるかが変わるので、両方を候補に挙げて $f(x,y)$ の値を比べる。

求めた最大値・最小値は、それを与える点の座標を $f(x,y)$ に代入して確かめられる。値が k と一致すれば、その点が $f(x,y)=k$ の上にあり、かつ R の点だと確かめたことになる。

やってみようの答え

① $(3,4)$ は $3^2+4^2=25$ で成り立つので円上にある。$(5,1)$ は $5^2+1^2=26$ で成り立たないので円上にない。円の外側にある。

② 頂点は $(0,0)$、$(6,0)$、$(0,3)$ で、原点から最も遠いのは $(6,0)$、距離は 6。半径 7 の円は三角形の外側を通り共有点をもたない。よって値が 49 の点は領域の中になく、$f(x,y)$ の取る値は $0\leqq k\leqq 36$ に限られる。

[*1] 塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えた。以下では、問題 1 を「連立不等式 $3x+y\leqq 5,\ x+4y\geqq -2,\ 2x-3y\geqq -4$ の表す領域 R で $x+3y$ の最大値と最小値を求めよ」、問題 2 を「連立不等式 $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+2y\leqq 6$ の表す領域 R で x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ」として扱う。