屈折の法則と最短時間

発展　高2数学・微分

授業では、沖の地点から船で岸へ向かい、上陸してからは岸沿いに歩いて目的地へ行くときに、かかる時間をもっとも短くする上陸地点を求めました[1]。答えは「岸に立てた垂線と船の進路のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ になる地点」でした。この角の条件は、光の屈折について知られている**屈折の法則**（スネルの法則）の特別な場合にあたります。以下では、進む速さが場所によって2通りに変わるときの最短時間の経路を微分で求め、その答えが光の屈折の法則と同じ式になることを確かめます。

1. 設定と結論

座標平面の x 軸を境界とし、$y>0$ の側では速さ v_1、$y<0$ の側では速さ v_2 で進めるとします。点 $\mathrm{A}(0,\,a)$ から点 $\mathrm{B}(c,\,-b)$（$a,\,b,\,c>0$）へ行くのに、境界上の点 $\mathrm{X}(x,\,0)$ まで直進し、そこから B まで直進します。どちらの側でも直進が最短なので、選べるのは境界を横切る点 X の位置 x だけです。

X で境界に垂直に立てた直線（法線）と、線分 XA のなす角を α、線分 XB のなす角を β とします。

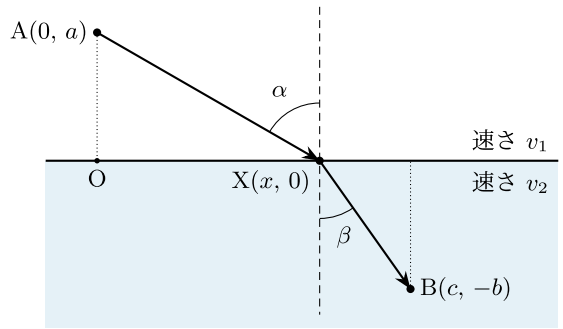


図1　x 軸の上側は速さ v_1、下側は速さ v_2。A から X を経て B へ進む。X の法線と XA のなす角が α、XB のなす角が β

屈折の法則

所要時間が最小になるのは、

$$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2}$$

が成り立つように X をとったときである。

光の場合、屈折率 n の物質の中を進む光の速さは $\dfrac{c_0}{n}$（c_0 は真空中の光の速さ）なので、上の式は $n_1\sin\alpha=n_2\sin\beta$、あるいは $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{n_2}{n_1}$ と書けます。たとえば屈折率をほぼ 1 とみなせる空気

から、屈折率が約 1.33 の水へ $\alpha = 60^\circ$ で光が入ると、$\sin\beta = \dfrac{\sin 60^\circ}{1.33} \fallingdotseq 0.651$ より $\beta \fallingdotseq 40.6^\circ$ で、光は法線に近づく向きに曲がります。図1は $v_1 : v_2 = 3 : 2$、$\alpha = 60^\circ$ の場合を描いたものです。

2. 微分による証明

所要時間は X の座標 x の関数で、

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}{v_2}$$

です。x で微分すると

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{c - x}{v_2\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}$$

となります。$0 < x < c$ のとき、図1の直角三角形から $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin\alpha$、$\dfrac{c - x}{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}} = \sin\beta$ なので、

$$T'(x) = \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2}$$

です。つまり $T'(x) = 0$ はちょうど屈折の法則の式です。残っているのは、この x が本当に最小を与えることと、そのような x が1つしかないことの確認です。

もう一度微分すると

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2\left\{(c - x)^2 + b^2\right\}^{3/2}} > 0$$

なので、$T'(x)$ はすべての実数 x で単調に増加します。さらに

$$\begin{aligned} T'(0) &= -\frac{c}{v_2\sqrt{c^2 + b^2}} < 0, \\ T'(c) &= \frac{c}{v_1\sqrt{c^2 + a^2}} > 0 \end{aligned}$$

なので、$T'(x) = 0$ となる x は $0 < x < c$ にただ1つあります。それを x_0 とすると、増減は次のとおりです。

x	$\cdots$	x_0	$\cdots$
$T'(x)$	$-$	0	$+$
$T(x)$	↘	最小	↗

よって T は $x = x_0$ で最小になり、そのとき $\dfrac{\sin\alpha}{v_1} = \dfrac{\sin\beta}{v_2}$ が成り立ちます。 ∎

変数を x でなく角 α にとることもできます。その場合は $a\tan\alpha + b\tan\beta = c$ という関係の両辺を α で微分して $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ を消去すると、同じ結論が得られます。

3. 光がこの法則に従う理由（ホイヘンスの原理）

§2 は「最短時間の経路はどこを通るか」という数学の問題でした。光が実際にこの経路を通ることは、波の性質から説明できます。**ホイヘンスの原理**とは、波面の各点から小さな球面状の波（素元波）が広がり、それらすべてに接する面が少し後の波面になる、という考え方です。

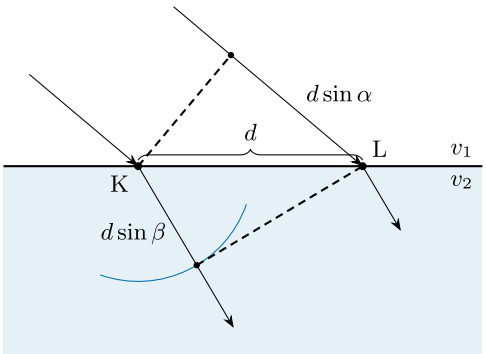


図2　平行な2本の光線が境界上の K と L に斜めに入る。K に届いた瞬間の波面（破線）から L までの残りは $d\sin\alpha$。その間に K から広がる素元波の半径は $d\sin\beta$ で、L からこの円に引いた接線が新しい波面

平行な光線の束が、境界に斜めに入ってくる場面を考えます。光線と波面は垂直で、境界と法線も垂直なので、波面と境界のなす角は入射角 α に等しくなります。図の点 K に一方の端が届いた瞬間、波面は K を通る破線の位置にあり、もう一方の端は境界上の点 L（$\mathrm{KL} = d$）までまだ $d\sin\alpha$ 残っています。この残りを進むのにかかる時間は $t = \dfrac{d\sin\alpha}{v_1}$ です。

その間に、K から下の側へ素元波が速さ v_2 で広がり、半径 $v_2 t$ の円になります。端が L に届いた瞬間の新しい波面は、L からこの円に引いた接線です。屈折した光線はこの接線に垂直なので、K から接点へ向かう向きに進み、法線とのなす角が屈折角 β になります。接線と境界のなす角も β なので、円の半径は $d\sin\beta$ と書けます。したがって

$$v_2 \cdot \frac{d\sin\alpha}{v_1} = d\sin\beta$$

$$\text{つまり}\ \frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}$$

となり、§2 で求めた最短時間の条件と同じ式が出てきます。 ∎

4. フェルマーの原理と授業で扱った問題

§2 と §3 の結果が一致するのは偶然ではありません。光は2点を結ぶ経路のうち所要時間が最小になるものを通る、という**フェルマーの原理**が知られています（正確には「所要時間が停留する経路」ですが、ここで扱う場面では最小です）。

授業で扱った問題をこの見方で読み直します。島 A から岸に下ろした垂線の足を H、$\mathrm{AH}=a$、H から目的地 C までを $\mathrm{HC}=b$ とし、海上の速さを v、岸沿いを歩く速さを $\sqrt{2}\,v$ とします。上陸点を X、$\mathrm{HX}=x$（$0 \leqq x \leqq b$）とすると、所要時間は

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v} + \frac{b-x}{\sqrt{2}\,v}, \\
T'(x) &= \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{v}\left(\sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

です（α は X の法線と XA のなす角）。§2 と同じく $T'(x)$ は単調に増加し、$T'(x)=0$ となるのは $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$、すなわち $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$、$x = a\tan\dfrac{\pi}{4} = a$ のときです。この点が $0 \leqq x \leqq b$ に入る条件は $a \leqq b$ です。$a > b$ のときは区間全体で $T'(x) < 0$ なので、$x=b$（船で C へ直行する）が最小になります。

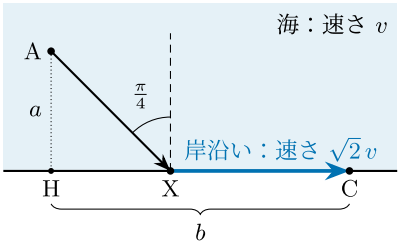


図3　沖の地点 A から岸へ。H は A から岸に下ろした垂線の足。上陸点 X では法線と XA のなす角が $\frac{\pi}{4}$。X から C までは岸沿いに速さ $\sqrt{2}\,v$ で進む

屈折の法則の側から見ると、岸沿いに歩く部分は「速さ $\sqrt{2}\,v$ の側を、境界に沿って進む」経路なので、屈折角が $\beta=\dfrac{\pi}{2}$ の場合にあたります。法則の式に入れると

$$
\frac{\sin\alpha}{v} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{2}\,v} \quad \text{より} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}
$$

となり、微分で求めた答えと一致します。

光が遅い側から速い側へ入るとき、$\sin\beta = \dfrac{v_2}{v_1}\sin\alpha$ は $\sin\alpha$ より大きいので、入射角 α を大きくしていくと、ある角で $\beta=\dfrac{\pi}{2}$ に達します。この角を臨界角といい、入射角がこれより大きいと屈折した光が

無くなり、光はすべて反射します（全反射）。授業で扱った問題の $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ は、$v_1 = v$、$v_2 = \sqrt{2}\,v$ のときの臨界角にあたります。

1　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。ここでは、海岸線から沖へ a だけ離れた地点 A から海岸上の地点 C へ行く問題で、A から海岸に下ろした垂線の足を H として $\mathrm{HC} = b$、海上の速さを v、岸沿いの速さを $\sqrt{2}\,v$ とします。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。
