**【定理】〈平方根の有理数条件〉**

非負整数 $n$ について，

[$\sqrt{n}$ が有理数]⇔[$n$ が平方数]

が成立する．

【証明１】

[$\sqrt{n}$ が有理数]⇐[$n$ が平方数] は自明なので，

[$\sqrt{n}$ が有理数]⇒[$n$ が平方数] を示せば良い．

$n=0$ では自明．$n \geqq 1$ について考える．

$\sqrt{n}$ が有理数であるなら，上より $\sqrt{n}$ は正なので，ある 2 つの互いに素な自然数 $p$ と $q$ によって

$$\sqrt{n} = \frac{q}{p}$$

と表せる．両辺を二乗して，

$$n = \frac{q^2}{p^2} \Leftrightarrow np^2 = q^2 \cdots ①$$

となる．

①の式で，$p$ と $q$ が互いに素であるので，$p^2$ と $q^2$ も互いに素だから，$p \geqq 2$ だと $p^2$ が $q^2$ の約数になってしまいこれら二つが互いに素であることに矛盾する．よって $p=1$ なので，

$$n = q^2$$

となる．今，$q$ は自然数であるから，$n$ は平方数となっている．よって示された．■

キーポイントは $p$ と $q$ を互いに素にしておくことでしたね！ 本質的にはほぼ同じですが，前に扱った $\sqrt{2}$ の非有理数性の証明と同じ方針で，以下のようにも示せます；

【証明２】

[$\sqrt{n}$ が有理数]⇒[$n$ が平方数] を示せば良い．

$n=0$ では自明．$n \geqq 1$ について考える．

$\sqrt{n}$ が有理数であるなら，上より $\sqrt{n}$ は正なので，ある 2 つの互いに素な自然数 $p$ と $q$ によって

$$\sqrt{n} = \frac{q}{p}$$

と表せる．両辺を二乗して，

$$n = \frac{q^2}{p^2} \cdots ②$$

となる．

②の式で，$p$ と $q$ が互いに素であるので，$p^2$ と $q^2$ も互いに素だから，$\dfrac{q^2}{p^2}$ は既約分数である．今，左辺の $n$ は自然数なので既約分数 $\dfrac{q^2}{p^2}$ も自然数になる必要があり，よって $p^2=1$ となるから

$$n = q^2$$

となる．今，$q$ は自然数であるから，$n$ は平方数となっている．よって示された．■