【定理】

$\sqrt{2}$ は有理数でない

【教科書の説明の詳解】

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定してみる．

まず，$1<2<4$，つまり $1^2<\sqrt{2}^{\,2}<2^2$ より $1<\sqrt{2}<2$（$\because$ 定義より $\sqrt{2}>0$）で，1 と 2 の間に整数はないから $\sqrt{2}$ は整数でない．

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると，定義と上の議論より $\sqrt{2}$ は整数でない正数なので，二つの互いに素な N（：自然数）と M（：**2 以上の**自然数）によって

$$\sqrt{2}=\frac{N}{M}$$

と表せる．両辺を二乗すると，

$$2=\frac{N^2}{M^2}\cdots①$$

となる．①をみると，左辺は整数なので右辺も整数でなくてはならない．つまり右辺は約分して分母が 1 にならなくてはならない．しかし，N と M が互いに素だったので N^2 と M^2 も互いに素だから右辺は既約分数であり，かつ $2\leqq M$ より $4\leqq M^2$ なので右辺の分母は 4 以上となる．よって矛盾してしまうので元々の仮定である「$\sqrt{2}$ が有理数である」というのが誤りであると言える．

【有名な証明】

背理法を用いて示す．つまり，$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定して矛盾を導く．

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると，定義より $\sqrt{2}$ は正数なので，二つの自然数 N と M によって

$$\sqrt{2}=\frac{N}{M}$$

と表せる．両辺を二乗すると，

$$2=\frac{N^2}{M^2}\ \Leftrightarrow\ 2\times M^2=N^2\cdots①$$

となる．今，N と M は自然数なので素因数分解ができて，この素因数「2」の個数がそれぞれ n 個と m 個（n，m はそれぞれ 0 以上の整数）だったとすると，N^2 と M^2 の素因数「2」の個数はそれぞれ $2n$ 個と $2m$ 個となる．

今，①の式を見ると，先の議論から左辺の素因数「2」の個数は $2m+1$ 個，右辺は $2n$ 個となるから，

$$2m+1=2n\ \Leftrightarrow\ 2(n-m)=1\cdots②$$

となる．②において左辺は偶数（$\because n$，m はそれぞれ整数より $n-m$ も整数）だが，右辺の 1 は奇数より矛盾．

よって背理法より，$\sqrt{2}$ は有理数でないことが示された．■