狭義単調増加と平均値の定理

高一数Ⅲ　木下智貴

授業で扱った例題の解答で，すこし怪しいなとみなさんが思うかもしれない部分についての補足をします．

問題

$x>0$ において，不等式 $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ が成立することを示せ．[*1]

解答は以下のような流れでした：

【解答】

$f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$ とすると，
$f'(x)=e^x-1-x$, $f''(x)=e^x-1$
このとき，$x>0$ において，
$f''(x)>f''(0)=0$
であるから，関数 $y=f'(x)$ は $x>0$ において単調に増加する．
よって $f'(x)>f'(0)=0$
故に，関数 $y=f(x)$ もまた，$x>0$ において単調に増加する．このとき，
$f(x)>f(0)=0$
以上より，$f(x)>0 \Leftrightarrow e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ ∎

これにおいて，中盤，$f'(x)$ の狭義単調増加性は $x>0$ でしか示されていないのに，$x>0$ で $f'(x)>f'(0)$ という不等式は，$x\geqq 0$ での $f'(x)$ の狭義単調増加性を仮定していないか？？と思った人がいるかもしれません．（あるいは，$f(x)$ の狭義単調増加性の範囲と $f(x)>f(0)$ という不等式についても同様の疑問を持った人がいるかもしれません．）実際，狭義単調増加性の定義は次：

【定義】〈狭義単調増加〉

区間 I に含まれる任意の $x_1<x_2$ について，$f(x_1)<f(x_2)$ が成立するとき，$f(x)$ は区間 I で狭義単調増加という．

であり，ここでいう I は今回は $x>0$ の範囲なので，この区間に含まれない $x=0$ を使った不等式 $f'(x)>f'(0)$ は言えないんじゃないかというのはもっともです．（僕も一時期これが本当に言えるのか悩んでいた時期がありました．）これを正当化するには，厳密には以下の定理を示す必要があります：

【定理 A】

$a\leqq x\leqq b$ において連続な関数 $f(x)$ が，$a<x<b$ で微分可能であり，かつ $a<x<b$ で $f'(x)>0$ が常に成り立つならば，$f(x)$ は $\boldsymbol{a\leqq x\leqq b}$ で狭義単調増加となる．

$f'(x)>0$ の範囲と，$f(x)$ が狭義単調増加な範囲が異なっている（後者は領域端点を含む）ことに注意しましょう．この証明は，「平均値の定理」を用います．

[*1] 塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えた。

―【定理】〈平均値の定理〉――――――――――

$a \leqq x \leqq b$ において連続な関数 $f(x)$ が，$a < x < b$ で微分可能ならば，

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

を満たすある $a < c < b$ が存在する．

これを用いて定理 A を証明することができます．具体的には，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ を満たす任意の x_1 と x_2 について，($f(x)$ は $x_1 \leqq x \leqq x_2$ でも連続で，$x_1 < x < x_2$ でも微分可能なので) 区間 $x_1 \leqq x \leqq x_2$ に平均値の定理を用いると，ある $x_1 < c < x_2$ が存在して，$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ となります．ここで，$x_1 < c < x_2$ より，**もし x_1 や x_2 が端点である a や b と等しかったとしても，c は $a < c < b$ を満たします．** よって，$a < x < b$ で $f'(x) > 0$ が常に成り立つならば $f'(c) > 0$ となります．$x_1 < x_2$ ですから $(x_2 - x_1) > 0$ で，よって $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ となるため，$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$ となります．これは狭義単調増加の定義そのものですし，何より $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ を満たす任意の x_1 と x_2 についてこれが言えますから，定理 A が示されるわけです．

最後に問題へ戻ります．$x > 0$ を満たす x を 1 つ固定し，区間 $0 \leqq t \leqq x$ で関数 $f'(t) = e^t - 1 - t$ を考えます．$f'(t)$ はこの区間で ($t = 0$ も含めて) 連続で，$0 < t < x$ で微分可能，しかも $0 < t < x$ では $f''(t) = e^t - 1 > 0$ です．よって定理 A から，$f'(t)$ は端点を含めた $0 \leqq t \leqq x$ で狭義単調増加なので，$f'(x) > f'(0)$ が言えます．$x > 0$ は何でもよかったので，$x > 0$ で $f'(x) > f'(0) = 0$ が成り立ちます．$f(x) > f(0)$ も，同じ考え方で $f(t)$ に定理 A を使えば言えます．