2項間と3項間を「次数下げ」で統一する

発展　中 3 数学・数列の“脱線”読み物　｜　漸化式・二次方程式の解と係数の関係　｜　特性方程式

数列の授業では、**2 段仮定型の帰納法**（前の 2 項を仮定して次を示す）や、**具体値から一般項を推測してから帰納法で証明する**やり方を学んだ。では、$a_{n+2}=p\,a_{n+1}+q\,a_n$（前の 2 項で次が決まる、**定数係数の 3 項間**）を、**推測に頼らず最初から一般項をズバリ求める**方法はないのか？係数 p,q が定数のときは、**3 項間を 2 項間（等比数列）に「落とす」**という一手で解ける。この見方だと **2 項間と 3 項間が同じ考えでつながる**。カギは**特性方程式**だ。

1. 出発点：2 項間漸化式は「等比数列」

いちばん短い漸化式は、2 項間 $a_{n+1}=r\,a_n$。これは公比 r の**等比数列**そのもので、$a_n=a_1\,r^{\,n-1}$ と**完全に解ける**。もう一歩進んだ $a_{n+1}=p\,a_n+q$（右辺に定数 q が付いた 2 項間）も、授業で解いたとおり、$\alpha=p\,\alpha+q$ をみたす α（$p\neq 1$ のとき存在する）だけずらして $a_{n+1}-\alpha=p\,(a_n-\alpha)$ とすれば、$a_n-\alpha$ が**等比数列**に化けて解けた。つまり**「等比に帰着させる」**という発想は、すでに手の内にある。そこで 3 項間 $a_{n+2}=p\,a_{n+1}+q\,a_n$ も、**同じ発想で 2 項間（等比）に落とせないか**を考える。うまくいけば「知らない 3 項間」を「知っている 2 項間」に帰着でき、**次数を 1 つ下げる**一手になる。

2. 標準の解法：$a_{n+1}-\alpha\,a_n$ を等比数列にする

解きたいのは、定数 p,q（$q\neq 0$ とする）による **3 項間漸化式**

$$a_{n+2}=p\,a_{n+1}+q\,a_n$$

である（前の 2 項 a_{n+1},a_n から次の a_{n+2} が決まる）。方針は、この 3 項間を**隣接 2 項間（等比数列）へ帰着**させることである。そこで、うまい定数 α,β を選んで**数列 $\{a_{n+1}-\alpha\,a_n\}$ が公比 β の等比数列**になるようにしたい。そうなる条件を、1 つ先 $a_{n+2}-\alpha\,a_{n+1}$ を計算して調べよう。$a_{n+2}=p\,a_{n+1}+q\,a_n$ を代入すると

$$a_{n+2}-\alpha\,a_{n+1}=(p-\alpha)\,a_{n+1}+q\,a_n.$$

これが公比 β の等比、すなわち $\beta\,(a_{n+1}-\alpha\,a_n)=\beta\,a_{n+1}-\alpha\beta\,a_n$ に一致するには、a_{n+1} と a_n の**係数を見比べて**

$$p-\alpha=\beta,\qquad q=-\alpha\beta\quad\Longleftrightarrow\quad \alpha+\beta=p,\ \ \alpha\beta=-q$$

であればよい。右側はまさに**二次方程式の解と係数の関係**であり、α,β は $x^2-p\,x-q=0$ を移項した**特性方程式**

$$x^2=p\,x+q\qquad\text{(特性方程式)}$$

の 2 解として**ひとりでに決まる**。つまり、特性方程式の 2 解 α,β に対して

$$a_{n+2}-\alpha\,a_{n+1}=\beta\,(a_{n+1}-\alpha\,a_n)$$

が成り立つ。これは「数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ の次の項が前の項のちょうど β 倍」という式で、$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ が**公比 β の等比数列**であることそのものである。しかも α,β は対等（入れかえても条件 $\alpha+\beta=p,\ \alpha\beta=-q$ は変わらない）だから、役割を入れかえた

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha\,(a_{n+1}-\beta a_n)$$

も同時に成り立ち、$\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は**公比 α の等比数列**になる。この 2 本から一般項を出す。

手順 1（2 本の等比数列の一般項）：$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は初項 $a_2-\alpha a_1$・公比 β の等比数列だから

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\,\beta^{\,n-1}\quad\cdots(1).$$

同じく $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は初項 $a_2-\beta a_1$・公比 α で

$$a_{n+1}-\beta a_n=(a_2-\beta a_1)\,\alpha^{\,n-1}\quad\cdots(2).$$

手順 2（引き算して a_{n+1} を消す）：(1)(2) はどちらも「a_{n+1} と a_n」の関係で、a_{n+1} がそのままの係数で入っている。**(1) から (2) を引く**と a_{n+1} が消え、$-\alpha a_n-(-\beta a_n)=(\beta-\alpha)\,a_n$ より

$$(\beta-\alpha)\,a_n=(a_2-\alpha a_1)\,\beta^{\,n-1}-(a_2-\beta a_1)\,\alpha^{\,n-1}.$$

$\alpha\neq\beta$ なら両辺を $\beta-\alpha$ で割って a_n が一つに定まる。α^n,β^n の係数はどちらも a_1,a_2 で決まる定数だから、それらを A,B とまとめれば

$$\boxed{\,a_n=A\,\alpha^{\,n}+B\,\beta^{\,n}\,}$$

の形になる（係数 A,B は α,β と a_1,a_2 で決まる定数）。なお、はじめから $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ と**形を仮定して初期値で A,B を合わせる**やり方も思いつくが、それだけでは「その形の数列**も**漸化式をみたす」という十分条件を確かめたにすぎない。実は、重解がなければ**どんな解も必ずこの形で表せる**ことが知られていて（のちほど § 7 で理由を述べる）、それを認めれば形を仮定するやり方も正当化できるのだが、この事実をきちんと示すのはひと仕事である。上のように 2 本の等比 (1)(2) を**引き算する**手順なら、その事実を借りずに a_n が**一意に定まる（必要十分）**。だから答案では毎回この手順を最後まで踏むのがよい。以下の例でもそうする。

2 項間と 3 項間のつながり

いちばん短い漸化式 $a_{n+1}=r\,a_n$ は等比数列そのもので、いわば特性方程式にあたる 1 次方程式 $x=r$ の解 1 個で片づく。3 項間は、$a_{n+1}-\alpha a_n$ **を等比数列にする**ことで 2 項間へ帰着させ、その定数 α,β が特性方程式の 2 解として現れた。2 項間も 3 項間も**「等比に帰着させる」同じ考え**で解けており、どちらも**一般項を推測する必要はない**。

以下では、特性方程式の解が**有理数・無理数・虚数**になる 3 つの例で、この手順を最後まで実行してみる。解の種類に応じて数列がどんな姿になるかが、はっきり見えるはずだ。

3. 例 1：解が相異なる有理数（$a_{n+2}=7a_{n+1}-12a_n$）

$a_1=1,\ a_2=7$、$a_{n+2}=7a_{n+1}-12a_n$ とする[*1]。特性方程式は

$$x^2=7x-12\iff x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=0,\qquad \alpha=3,\ \beta=4.$$

[*1] 塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えた。

本当に等比数列ができているか、漸化式を移項して確かめよう。$a_{n+2}=7a_{n+1}-12a_n$ より

$$a_{n+2}-3\,a_{n+1}=4\,a_{n+1}-12\,a_n=4\,(a_{n+1}-3\,a_n),\qquad a_{n+2}-4\,a_{n+1}=3\,a_{n+1}-12\,a_n=3\,(a_{n+1}-4\,a_n)$$

となり、たしかに $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比 4、$\{a_{n+1}-4a_n\}$ は公比 3 の等比数列である。初項は $a_2-\alpha a_1=7-3=4$、$a_2-\beta a_1=7-4=3$ だから

$$a_{n+1}-3a_n=4\cdot 4^{\,n-1}=4^{\,n}\ \cdots(1),\qquad a_{n+1}-4a_n=3\cdot 3^{\,n-1}=3^{\,n}\ \cdots(2).$$

$(1)-(2)$ で a_{n+1} が消え、$(-3+4)a_n=a_n$ より

$$\boxed{a_n=4^{\,n}-3^{\,n}}.$$

実際 1, 7, 37, 175, 781, … とぴたり合う。解が有理数なので一般項もきれい。**推測せずに一発**で出た。

4. 例 2：解が無理数（フィボナッチ：整数列なのに一般項に $\sqrt{5}$）

だれもが知る**フィボナッチ数列** $1,1,2,3,5,8,13,\ldots$ は、$a_1=a_2=1$、$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ で定まる。特性方程式は

$$x^2=x+1\iff x^2-x-1=0,\qquad \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

で、解は**無理数**。2 本の等比数列を作ろう。初項 $a_2-\alpha a_1=1-\alpha$ だが、ここで $1-\alpha=1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\beta$（同様に $1-\beta=\alpha$）なので

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(1-\alpha)\beta^{\,n-1}=\beta\cdot\beta^{\,n-1}=\beta^{\,n}\ \cdots(1),\qquad a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{\,n}\ \cdots(2).$$

$(1)-(2)$ より $(\beta-\alpha)a_n=\beta^{\,n}-\alpha^{\,n}$、すなわち $a_n=\dfrac{\alpha^{\,n}-\beta^{\,n}}{\alpha-\beta}$。$\alpha-\beta=\sqrt{5}$ だから

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}}$$

（**ビネの公式**）。$\sqrt{5}$ だらけの式なのに、$n=1,2,3,\ldots$ を入れると $1,1,2,3,5,\ldots$ と**必ず整数**に戻る。整数列なのに一般項は無理数を含む、という不思議は、特性方程式の解が無理数だからこそ起きる。$1,1,2,3,5$ を眺めるだけではこの形は**推測できず**、特性方程式の手順があってはじめて求まる。

5. 例 3：解が虚数（実数列なのに一般形に i が出る）

こんどは $a_1=1,\ a_2=1$、$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$。数列を書き出すと

$$1,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots\quad\text{(6 項ごとにくり返す、れっきとした実数列)}$$

特性方程式は $x^2=x-1$、すなわち $x^2-x+1=0$。判別式は $1-4=-3<0$ で、解は**虚数**

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2},\qquad \beta=\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}.$$

手順はこれまでと変わらない。初期値 $a_1 = a_2 = 1$ は例 2 と同じなので、$1-\alpha=\beta,\ 1-\beta=\alpha$ から 2 本の等比

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{\,n} \ \cdots(1), \qquad a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{\,n} \ \cdots(2)$$

ができ、(1)−(2) を引いて

$$a_n = \frac{\alpha^{\,n} - \beta^{\,n}}{\alpha - \beta}$$

を得る。ここまでは例 2 と同じ形だが、いまは α, β が**虚数**である。数列は全部実数なのに材料が虚数、という一見おかしな状況で、この $\alpha^{\,n} - \beta^{\,n}$ と $\alpha - \beta$ を**三角関数の形**に書きなおすと、虚部がきれいに打ち消し合って実数に戻るのが見える。次のコラムでそれを行う。

コラム：虚数の解は三角関数に化ける（ド・モアブルの定理）

まず、**どんな複素数** $a+bi$ **も**、0 以上の実数 r と角 θ を使って

$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

の形に書ける。実際、$r = \sqrt{a^2+b^2}$ とおき、$\cos\theta = \dfrac{a}{r},\ \sin\theta = \dfrac{b}{r}$ をみたす θ を取ればよい（このとき $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{r^2} = 1$ だから、そのような θ は必ず存在する）。a, b を $\sqrt{a^2+b^2}$ で割って係数を $\cos, \sin$ にそろえるこのやり方は、三角関数の**合成** $a\cos\varphi + b\sin\varphi = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\varphi+\delta)$ で係数を振幅と角に読みかえたのと同じである。

この形が便利なのは、**2 つかけると角度がちょうど足し算になる**からである。実際、一般の θ, φ について**加法定理**を使うと

$$\begin{aligned}&(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\ &\quad= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i\,(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)\\ &\quad= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)\end{aligned}$$

がわかる（$i^2 = -1$ と加法定理を使った）。「かけ算＝角度の足し算」だから、$(\cos\theta + i\sin\theta)$ を n 回かければ角度は θ の n 個ぶん、すなわち $n\theta$ になり、

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (\text{ド・モアブルの定理})$$

が成り立つ。

さて、いまの二つの解 $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ と $\beta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ をこの形に書こう。どちらも $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ で、α は $\cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ から $\theta = 60°$、β は $\cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ から $\theta = -60°$。よって

$$\alpha = \cos 60° + i\sin 60°, \qquad \beta = \cos(-60°) + i\sin(-60°).$$

ド・モアブルの定理をそれぞれに用いると

$$\alpha^{\,n} = \cos(60°n) + i\sin(60°n), \qquad \beta^{\,n} = \cos(60°n) - i\sin(60°n)$$

（$\beta^{\,n} = \cos(-60°n) + i\sin(-60°n)$ で、cos は偶関数・sin は奇関数だから虚部の符号だけ逆になる）。これで、例 3 で引き算まで済ませておいた $a_n = \dfrac{\alpha^{\,n} - \beta^{\,n}}{\alpha - \beta}$ の分子・分母がどちらも書きく

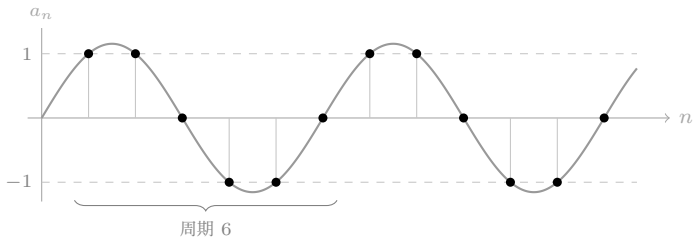
だせる：

$$\alpha^n - \beta^n = 2i\,\sin(60^\circ n), \qquad \alpha - \beta = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3}\,i.$$

分子・分母がどちらも虚数単位 i を含むので、割ると i が約分されて実数になる：

$$a_n = \frac{2i\,\sin(60^\circ n)}{\sqrt{3}\,i} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\sin\bigl(60^\circ \cdot n\bigr)$$

となる（$n = 1, 2, 3, \dots$ で $1, 1, 0, -1, -1, 0, \dots$）。$60^\circ \times 6 = 360^\circ$ だから**周期 6** になるのも当然である。虚数を経由して実数の周期数列が出てくる、これが二次方程式と三角関数のつながりである。



$a_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin(60^\circ n)$（点）と、それを結ぶ sin 曲線。$1, 1, 0, -1, -1, 0, \dots$ と **6 項でくり返す**実数列。

6. 例外：解が重解のとき（等比が「等差」にずれる）

特性方程式が**重解**（2 解が一致）になると、$\alpha = \beta$ なので $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ の 2 本の等比が重なってしまい、これまでの「2 本を引き算」は使えない（同じ式どうしを引くと $0 = 0$ となって何も残らない）。この場合を具体例で見よう。

$a_1 = 2,\ a_2 = 9$、$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ とする。特性方程式は

$$x^2 = 6x - 9 \iff x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0, \qquad \alpha = 3 \text{ (重解)}.$$

それでも、$a_{n+1} - \alpha a_n$ を等比数列にする手順そのものは使える。ただし解は $\alpha = 3$ の 1 つだけだから、作れる等比数列も $b_n := a_{n+1} - 3a_n$ の 1 **本だけ**である。これは公比 3 の等比数列で、初項は $b_1 = a_2 - 3a_1 = 9 - 6 = 3$ だから $b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$。よって

$$a_{n+1} - 3a_n = 3^n$$

という 2 項間に落ちる。ここで右辺の 3^n を定数に変えるため、**両辺を $\alpha^{n+1} = 3^{n+1}$ で割る**と

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$

となる。そこで $c_n := \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと $c_{n+1} - c_n = \dfrac{1}{3}$、つまり c_n は**公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列**。初項 $c_1 = \dfrac{a_1}{3} = \dfrac{2}{3}$ より $c_n = \dfrac{2}{3} + (n-1)\dfrac{1}{3} = \dfrac{n+1}{3}$。したがって

$$\boxed{a_n = 3^n c_n = (n+1)\,3^{n-1}}$$

$(2, 9, 36, 135, 486, \dots$ と一致)。n が 1 **次で顔を出す**のがポイントで、一般に重解 α のときは $a_n = (A + Bn)\,\alpha^n$ の形になる。

7. 一般の m 項間へ：等比の重ね合わせと解と係数の関係

---

3 項間を解いたときの話が、そのまま長い漸化式に伸びる。項数は番号 n と紛れないよう m で書き、m **項間**（前の $m-1$ 項で次が決まる、係数が定数の漸化式。$p_{m-1} \neq 0$ とする）

$$a_{n+m-1} = p_1\, a_{n+m-2} + \cdots + p_{m-1}\, a_n$$

を考える（$m = 3$ とすれば $a_{n+2} = p\, a_{n+1} + q\, a_n$ に戻る）。

結論の先出し

3 項間の $x^2 = px + q$ にあたる**特性方程式**は、m 項間では $m-1$ 次方程式

$$x^{m-1} = p_1\, x^{m-2} + \cdots + p_{m-1}$$

になり、その $m-1$ **個の解** $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ が、3 項間の α, β とそっくり同じ役割をはたす。解と係数の関係もそのまま拡張され（3 項間の $\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = -q$ が、$m-1$ 個の解の基本対称式と係数の関係にひろがる）、一般項は、特性方程式に**重解がない場合には**、これら $m-1$ **本の等比の重ね合わせ**

$$a_n = A_1\, \alpha_1^n + A_2\, \alpha_2^n + \cdots + A_{m-1}\, \alpha_{m-1}^n$$

になる（重解があるときは、3 項間のときと同じく n の多項式が顔を出す）。

漸化式	特性方程式	解の個数
2 項間	1 次（$x = r$）	1 個
3 項間	2 次（$x^2 = px + q$）	2 個
m 項間	$m-1$ 次	$m-1$ 個

長い話になるので、確かめるべきことを先に 3 つの問いに分けておこう。

1. **問 1**：なぜ特性方程式の解 α の等比数列 α^n は、漸化式をみたすのか。
2. **問 2**：なぜ、それらを**重ね合わせて**よいのか。
3. **問 3**：重ね合わせで、漸化式の解は**全部**尽くせているのか。

そのあと仕上げに、3 項間で使った「等比に落とす」計算が m 項間でもそのまま動くことを、4 項間を例に確かめる。

問 1：なぜ $a_n = \alpha^n$ が漸化式をみたすのか。　式に起こせば一目である。$a_n = \alpha^n$ を漸化式の右辺に代入し、α^n でくくると

$$p_1\, \alpha^{n+m-2} + \cdots + p_{m-1}\, \alpha^n = \alpha^n \left(p_1\, \alpha^{m-2} + \cdots + p_{m-1}\right) = \alpha^n \cdot \alpha^{m-1} = \alpha^{n+m-1}$$

となって、左辺 $a_{n+m-1} = \alpha^{n+m-1}$ に一致する。途中、括弧の中がちょうど特性方程式の右辺になっていて、α が特性方程式の解だからこそ、括弧を α^{m-1} に置きかえられた。つまり

「α^n が漸化式をみたす」と「α が特性方程式をみたす」は同じことの言い換え

であり、特性方程式は「等比数列 α^n が漸化式の解になるための、公比 α の条件」と読むこともできる。

問 2：なぜ重ね合わせてよいのか。　漸化式を移項した $a_{n+m-1} - p_1 a_{n+m-2} - \cdots - p_{m-1} a_n = 0$ の左辺は、数列の各項を**定数倍して足す**だけでできている。だから 2 つの数列 $\{a_n\}, \{a'_n\}$ がどちらもこの式をみたすなら、混ぜた数列 $\{A\,a_n + B\,a'_n\}$ を代入しても $A \times 0 + B \times 0 = 0$ となって、やはりみたす：**漸化式の解どうしを定数倍して足したものも、また漸化式の解**である。問 1 で見たとおり、特性方程式の各解 α_i について等比数列 α_i^n は漸化式の解だから、これと合わせれば、重ね合わせ $A_1\alpha_1^n + \cdots + A_{m-1}\alpha_{m-1}^n$ は、係数 $A_1, \ldots, A_{m-1}$ をどう選んでも**必ず漸化式をみたす**ことがわかる。

問 3：これで漸化式の解の「全部」なのか。　つまり、どんな初期値から出発した解も、本当にこの重ね合わせの形に書けるのか。カギは、**漸化式の解ははじめの $m-1$ 項で完全に決まる**という当たり前の事実だ。$a_1, \ldots, a_{m-1}$ が決まれば漸化式が a_m を決め、それが決まれば次の a_{m+1} が決まり、……と**ドミノ式に**すべて決まってしまう（授業でやった帰納法の考え方そのものである）。したがって、もし係数 $A_1, \ldots, A_{m-1}$ をうまく選んで、重ね合わせの**はじめの $m-1$ 項**を与えられた $a_1, \ldots, a_{m-1}$ に一致させられれば、もとの解と重ね合わせはともに漸化式をみたし出だしも同じだから、**以後のすべての項が一致**する。つまり、その解は重ね合わせの形に書けている。係数を合わせる条件は

$$A_1\,\alpha_1 + \cdots + A_{m-1}\,\alpha_{m-1} = a_1, \qquad A_1\,\alpha_1^2 + \cdots + A_{m-1}\,\alpha_{m-1}^2 = a_2, \qquad \ldots$$

という、$A_1, \ldots, A_{m-1}$ についての**連立一次方程式**（$m-1$ 本）である。3 項間（$m = 3$）なら未知数 2 個の連立で、$\alpha \neq \beta$ のとき必ず解ける。実際、手順 2 の「2 本の等比を引き算する」計算は、この連立を解いたことに相当している。

残る一点は、**一般の m でも、この連立は必ず解けるのか**である。未知数 $m-1$ 個に式が $m-1$ 本だから、文字を順に消去していけば解けそうに見えるし、実際**特性方程式の解がすべて相異なれば、この連立方程式は必ずただ 1 通りに解ける**。ただし、未知数と式の数が同じでも、式どうしが「かぶって」いると解は定まらない（例：$x + y = 1$ と $2x + 2y = 2$）。解 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ が相異なるかぎりこの「かぶり」は決して起きない、というのがここの核心で、その厳密な証明に大学で学ぶ**線形代数**という分野の道具（ヴァンデルモンドの行列式）を使う。ここではこの 1 点だけを事実として認めよう。

ここまでの到達点

1. 重ね合わせ $A_1\alpha_1^n + \cdots + A_{m-1}\alpha_{m-1}^n$ は**常に漸化式の解**（問 1 ＋問 2。完全に初等的）。
2. 係数さえ確定すれば、漸化式に従うよう作った以上**それ以外の値の取りようがない**（問 3 のドミノ。これも初等的）。
3. 大学数学を借りるのは**「係数合わせの連立が必ず解ける」という最後の一手だけ**（ヴァンデルモンドの行列式）。

形を当てずっぽうに仮定したのではなく、これが解の全部だと確定できるのが要点である。

仕上げ：m 項間を実際に等比へ「落とす」。　最後に、m **項間を項数が 1 つ少ない漸化式に落とすための α の条件**として、この $m-1$ 次特性方程式が現れることを、§ 2 と同じ**係数を見比べる計算**で確かめる。$b_k = a_{k+1} - \alpha\,a_k$ とおき、$\{b_k\}$ が項数の 1 つ少ない漸化式をみたすように α を選ぶ。この α として特性方程式の解を 1 つ使うたびに、項数が 1 つ減っていく。

一般の 4 **項間**

$$a_{k+3} = p\,a_{k+2} + q\,a_{k+1} + r\,a_k$$

で確かめる。3 項間のときと同じく $b_k = a_{k+1} - \alpha\, a_k$ の 2 つ先を計算すると

$$b_{k+2} = a_{k+3} - \alpha\, a_{k+2} = (p-\alpha)\, a_{k+2} + q\, a_{k+1} + r\, a_k.$$

これが b だけの 3 項間 $b_{k+2} = P\, b_{k+1} + Q\, b_k$ になってほしい。右辺を $b_{k+1} = a_{k+2} - \alpha\, a_{k+1}$、$b_k = a_{k+1} - \alpha\, a_k$ で書き直して a_{k+2}, a_{k+1}, a_k の係数を**見比べる**と、

$$P = p - \alpha, \qquad Q - \alpha P = q, \qquad -\alpha Q = r$$

の 3 本が出る。上の 2 本から $Q = q + \alpha P = q + \alpha(p-\alpha)$ を最後の式に入れ、α だけの式に直すと

$$\alpha^3 = p\,\alpha^2 + q\,\alpha + r.$$

つまり α は、3 項間での $x^2 = px + q$ にあたる**特性方程式** $x^3 = p\,x^2 + q\,x + r$ の解でなければならない（3 項間で特性方程式が $a_{n+1} - \alpha\, a_n$ を等比にする条件だったのと同様、これも 4 **項間を 3 項間に落とすための** α **の条件**として現れる）。この 3 次方程式の 3 解 α, β, γ について、$x^3 - p\,x^2 - q\,x - r = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ の係数を見比べれば**解と係数の関係**

$$\alpha + \beta + \gamma = p, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -q, \qquad \alpha\beta\gamma = r$$

が成り立つ。3 項間で $\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = -q$ が果たしたのと同じ役割だ。

落とした先の特性方程式はどうなるか。　ここで大事なのは、落とした 3 項間 $b_{k+2} = P\, b_{k+1} + Q\, b_k$ の**特性方程式** $x^2 = Px + Q$ **の 2 解が、残りの解** β, γ **そのもの**だということである。実際、もとの特性方程式の解と係数の関係から

$$P = p - \alpha = (\alpha + \beta + \gamma) - \alpha = \beta + \gamma, \qquad Q = -\beta\gamma$$

となり（Q は $-\alpha Q = r = \alpha\beta\gamma$ より）、$x^2 - Px - Q = (x-\beta)(x-\gamma)$。つまり、解 α を使って 4 項間を 3 項間へ落とすと、**使われずに残った解** β, γ **が、そのまま落とした先の 3 項間に引き継がれる**（P, Q は β, γ 自身ではなく、その和と積＝落とした先の解と係数である）。この 3 項間を § 2 の方法でさらに 2 項間まで落とせば b_k が求まり、最後に $a_{k+1} - \alpha\, a_k = b_k$ を解いて a_n が出る。結果として一般項は等比の重ね合わせ

$$a_n = A\,\alpha^n + B\,\beta^n + C\,\gamma^n$$

になり、係数 A, B, C は、3 項間と同じく**順に等比へ落として引く**操作を最後までたどれば初期値 a_1, a_2, a_3 から定まる。

5 項間以上も手つきは同じで、$b_k = a_{k+1} - \alpha\, a_k$ とおくたびに項数が 1 つ減り、α の満たす特性方程式の次数が 1 つずつ上がる。解と係数の関係の本数も特性方程式の次数ぶん（項数より 1 少ない本数）に増える（一般には $\sum, \prod$ を使う書き方になり、ここには書ききれない）。式が長くなるだけで、**項数を 1 つずつ落として等比に帰着させる**という筋は少しも変わらない。

コラム：微分方程式とのつながり（特性方程式のふるさと）

実は、この「特性方程式」という道具は、数列だけのものではない。大学で学ぶ**微分方程式**（関数の「変わり方」＝増える速さに条件をつけて、関数そのものを求めるタイプの方程式）を解くのに、まったく同じ特性方程式が現れる。数列の側では 18 世紀前半にド・モアブルが同じ考えで漸化式（回帰級数）を解き、ほぼ同じころオイラーが線形微分方程式を解くために同じ手法を整えた。数

列 a_n の番号 n は $1, 2, 3, \ldots$ と、とびとびにしか動かない。この n を、すき間なく連続に動く変数 x に置きかえ、数列 a_n を関数 $y(x)$ に置きかえたものが微分方程式の世界である。つまり**微分方程式は「漸化式の n を x へ連続化したもの」**であり、逆に言えば漸化式は微分方程式の“とびとび版”にあたる。等比数列 α^n の相方は指数関数であり、特性方程式が同じ形になること、解と係数の関係で解けること、**重解のときにおまけの n（あちらでは x）が付くこと、虚数解のときに三角関数（振動）が現れること**まで、本稿の話が一つ残らず対応する。高校の数学 III で微分・積分を学ぶと微分方程式の入り口が見えてくるので、興味があったら「線形微分方程式 特性方程式」で調べてみてほしい。

まとめ：「等比に落とす」で 2 項間と 3 項間を統一

1. 2 項間 $a_{n+1} = ra_n$ は等比数列（＝完全に解ける）。3 項間はこれに**落とす**のが目標。
2. **特性方程式** $x^2 = px + q$（$a_{n+1} - \alpha a_n$ を等比にする条件）の 2 解 α, β で、漸化式を 2 通りの**等比の形**（$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\,(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と、α, β を入れかえた形）に書き直し、2 本の等比を作って**引き算**すれば a_n（$= A\alpha^n + B\beta^n$ 型）が**一意に**定まる（形を先に仮定して係数を当てるのは十分条件どまり）。**解と係数の関係** $\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = -q$ がこの書き直しを支える。
3. 解が**有理数**なら一般項もきれい（例 1）、**無理数**なら整数列でも一般項に無理数（例 2・フィボナッチ）、**虚数**なら実数のまま**周期的**＝三角関数（例 3）。
4. **重解**のときは等比が**等差にずれて** $a_n = (A + Bn)\alpha^n$ 型（本文の例で確認）。一般の m 項間も**項数を 1 つずつ落として等比に帰着**するだけ（解と係数の関係が支える）。

確かめてみよう

- **表計算で数列を作る**：a_1, a_2 を置き、$a_{n+2} = p\,a_{n+1} + q\,a_n$ で下へ伸ばす。例 1 なら $4^n - 3^n$、例 3 なら $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(60°n)$ と一致するのを確かめる。
- **Desmos で一般項を重ねる**：desmos.com/calculator に `a(n)=4^n-3^n` や `b(n)=2/sqrt(3)*sin(60*n*pi/180)` を入れ、整数 n での値が数列と合うか見る。