ヤングの不等式とその応用

発展　高2数学・微分

授業で扱った問題は、正の数a, bについて

$$1+b+2ab-e^b \leqq 2\int_0^a \log(1+2x)\,dx$$

を示す問題でした[1]。授業ではbを固定してaの関数とみなし、微分して増減を調べました。この方法で確かに示せますが、なぜ左辺にe^bが、右辺にlogが現れるのか、という組み合わせの理由は見えにくいままです。実はこの不等式は、ある関数とその逆関数の積分を並べた一般的な不等式の、特別な場合になっています。この頁ではその不等式を図で納得し、そこから相加平均・相乗平均の関係の拡張や、ベクトルの長さに関する不等式にまでつなげます。

1. ヤングの不等式

ヤング（Young）の不等式

関数$f(x)$は$x \geqq 0$で連続かつ狭義単調増加で、$f(0)=0$、$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$をみたすとする。このとき、正の数$a$, bに対して

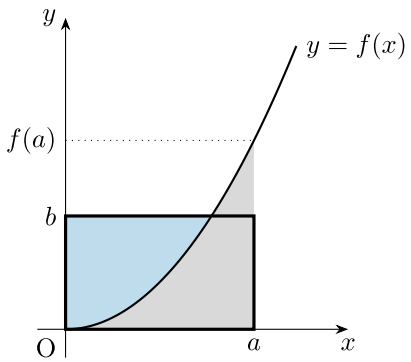
$$ab \leqq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy$$

が成り立つ。等号が成り立つのは$b=f(a)$のときだけである。

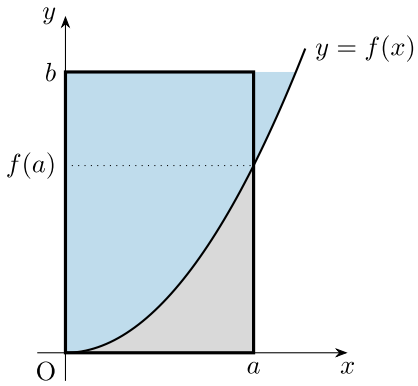
仮定のうち「$f(0)=0$」「$x\geqq 0$で連続」「$x\to\infty$でいくらでも大きくなる」の3つは、fが0以上の数全体を0以上の数全体へ漏れなく1対1に移すことを保証しています。こうしておくと逆関数$f^{-1}(y)$が$y\geqq 0$のどこでも定義され、右辺の2つ目の積分が意味をもちます。たとえば$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$は連続で増加し$f(0)=0$ですが、値が1に届かないので、$b\geqq 1$では$f^{-1}(b)$がありません。

面積で見る

$y=f(x)$のグラフを描き、2つの積分を面積として読みます。$\int_0^a f(x)\,dx$は、曲線の**下側**で$0\leqq x\leqq a$の部分（灰色）の面積です。$\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$はyで積分しているので、y軸の側から見た面積、つまり曲線の**左側**で$0\leqq y\leqq b$の部分（青）の面積です。左辺のabは、太線で囲んだ横a・縦bの長方形の面積です。



上の図は$b < f(a)$の場合です。長方形の中の点は、曲線より左上にあれば青に、右下にあれば灰色に入るので、長方形は青と灰色でちょうど埋めつくされます。そのうえ灰色は、長方形の上辺$y = b$から$y = f(a)$までの細い部分だけ長方形からはみ出しています。したがって「灰色＋青」は長方形よりはみ出し分だけ大きく、不等式は等号なしで成り立ちます。



$b > f(a)$のときは役割が入れかわり、青が長方形の右側$x > a$へはみ出します。どちらの場合も、はみ出しの部分がなくなるのは、点$(a,\, b)$がグラフ$y = f(x)$上にあるとき、つまり$b = f(a)$のときです。これが等号の条件です。

2. 授業で扱った問題との関係

$f(x) = \log(1 + 2x)$は$x \geqq 0$で連続かつ増加し、$f(0) = 0$で、$x \to \infty$のときいくらでも大きくなるので、ヤングの不等式の仮定をみたします。$y = \log(1 + 2x)$をxについて解くと$x = \dfrac{e^y - 1}{2}$なので、$f^{-1}(y) = \dfrac{e^y - 1}{2}$です。ヤングの不等式に代入すると

$$ab \leqq \int_0^a \log(1 + 2x)\, dx + \int_0^b \frac{e^y - 1}{2}\, dy$$

で、右辺の2つ目の積分は$\dfrac{1}{2}\Big[e^y - y\Big]_0^b = \dfrac{e^b - b - 1}{2}$です。両辺を2倍して移項すると

$$1 + b + 2ab - e^b \leqq 2\int_0^a \log(1 + 2x)\, dx$$

となり、授業で扱った問題の不等式そのものが出てきます。e^bはlogの逆関数を積分したところから来ていたわけです。等号の条件$b=f(a)$も、$b=\log(1+2a)$という形でそのまま読み取れます。

3. 応用①：重み付きの相加平均・相乗平均の関係

fをxのべき乗にとると、相加平均と相乗平均の関係を一般化した不等式が得られます。

$p>1$として$f(x)=x^{p-1}$とおきます。これはヤングの不等式の仮定をみたし、逆関数は$f^{-1}(y)=y^{\frac{1}{p-1}}$です。ここで$q$を

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \qquad \left(\text{同じことだが } q-1=\frac{1}{p-1}\right)$$

で決めると、$f^{-1}(y)=y^{q-1}$と書けます。2つの積分は$\dfrac{a^p}{p}$、$\dfrac{b^q}{q}$なので、

$$ab \leqq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \qquad \left(a,\,b>0,\ \ p,\,q>1,\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

となります。これもヤングの不等式と呼ばれることが多く、等号は$b=a^{p-1}$、すなわち$a^p=b^q$のときです。

ここで文字を置きかえます。$P=\dfrac{1}{p}$、$Q=\dfrac{1}{q}$とおくと$P,\,Q>0$、$P+Q=1$です。さらに$A=a^p$、$B=b^q$とおくと（$a,\,b>0$なので$A,\,B>0$）、$a=A^P$、$b=B^Q$となるので、上の不等式は

$$\boldsymbol{A^P B^Q \leqq PA+QB} \qquad (A,\,B>0,\ \ P,\,Q>0,\ \ P+Q=1)$$

と書きかえられます。左辺はAとBに重み$P,\,Q$をつけた相乗平均、右辺は同じ重みの相加平均で、これを**重み付きの相加平均・相乗平均の関係**と呼びます。$P=Q=\dfrac{1}{2}$とおくと、おなじみの$\sqrt{AB} \leqq \dfrac{A+B}{2}$に戻ります。重みが偏った例として$P=\dfrac{1}{3}$、$Q=\dfrac{2}{3}$、$A=8$、$B=1$を入れると、左辺は$8^{\frac{1}{3}}\cdot 1=2$、右辺は$\dfrac{8}{3}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$で、確かに左辺のほうが小さくなっています。等号は$A=B$のときです。

4. 応用②：ヘルダーの不等式とミンコフスキーの不等式

ヤングの不等式は、数の組（ベクトル）の大きさについての有名な2つの不等式の出発点にもなります。

ヘルダーの不等式

$p,\, q > 1$、$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$とする。複素数$x_1, \cdots, x_n,\ y_1, \cdots, y_n$に対して

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$p = q = 2$の場合が、コーシー・シュワルツの不等式$\sum |x_k y_k| \leqq \sqrt{\sum |x_k|^2} \sqrt{\sum |y_k|^2}$です。

証明（応用①の形を1項ずつ使う）

右辺の2つの因数をそれぞれX、Yと書きます（どちらかが0なら、その組の数がすべて0で両辺とも0なので、$X, Y > 0$としてよい）。各kについて、$a = \dfrac{|x_k|}{X}$、$b = \dfrac{|y_k|}{Y}$に応用①の不等式$ab \leqq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$を使うと（$a$か$b$が0のときも両辺の大小は保たれる）

$$\frac{|x_k y_k|}{XY} \leqq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{X^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{Y^q}$$

これを$k = 1, \cdots, n$で足すと、$\sum |x_k|^p = X^p$、$\sum |y_k|^q = Y^q$なので右辺の和は$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$になり、$\sum |x_k y_k| \leqq XY$を得ます。

ミンコフスキーの不等式

$p \geqq 1$とする。複素数$x_1, \cdots, x_n,\ y_1, \cdots, y_n$に対して

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\left(\sum |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$を「$p$乗で測ったベクトル$(x_1, \cdots, x_n)$の長さ」とみると、これは「和の長さは長さの和以下」という三角不等式の形です。実際、$p = 2$で成分が実数なら、平面や空間でのおなじみの三角不等式$|\vec{u} + \vec{v}| \leqq |\vec{u}| + |\vec{v}|$そのものです。なお$p < 1$では成り立たず、たとえば$p = \dfrac{1}{2}$、$(x_1, x_2) = (1, 0)$、$(y_1, y_2) = (0, 1)$で左辺は4、右辺は2になります。

証明（ヘルダーの不等式から）

$p = 1$は各項の三角不等式$|x_k + y_k| \leqq |x_k| + |y_k|$を足すだけなので、$p > 1$とし、$q$を$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$で決めます。$S = \sum |x_k + y_k|^p$とおき、$S > 0$の場合を考えます。$|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k| \cdot |x_k +$

$|y_k|^{p-1} \leqq |x_k|\,|x_k+y_k|^{p-1} + |y_k|\,|x_k+y_k|^{p-1}$を足し、右辺の2つの和にそれぞれヘルダーの不等式を使います。$(p-1)q = p$なので$\sum \left(|x_k+y_k|^{p-1}\right)^q = S$となり、

$$S \leqq \left\{ \left(\sum |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\} S^{\frac{1}{q}}$$

両辺を$S^{\frac{1}{q}}$で割ると、$1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$より左辺は$S^{\frac{1}{p}}$になり、示すべき式が出ます。

ヤングの不等式からヘルダー、ヘルダーからミンコフスキーへと、1本の面積の図から順に積み上がっていく関係になっています。大学で関数の大きさを積分で測る場面（関数解析）では、この2つが基本的な道具として使われます。

1　塾の授業で扱った問題は塾の教材なので、数値を変えた類題に差し替えています。

塾の授業で配った補足資料をもとに、問題を類題に差し替えて書き直しました。
