第 2 章

解けない方程式を調べる方法（定性的理論の基礎）

★★★ 最重要 巻全体の道具箱。誤差評価・適切性・コンパクト性・弱収束の 4 つを、後の全章がここから借りる

物理に現れる微分方程式のほとんどは、閉じた式では解けない。それでも「解は存在するか」「一意か」「初期値を少し変えると解はどれだけ変わるか」「時間がたつとどうなるか」には答えられることが多い。この章では、解を書き下さずに解の性質を調べるための道具を、関数解析を未習の読者に向けて原理から用意する。後の章で近似（Galerkin、平均場極限、均質化など）を正当化するとき、使われるのはほぼすべてこの章の道具である。

2.1 「解けない」とはどういうことか

★★ 重要 「閉じた式で書けない」と「解が無い」を区別し、問うべきことを Hadamard の 3 条件に整理する

2.1.1 閉じた式で書けないことと、解が存在しないこと

「この方程式は解けない」という言い方には、意味の違う二つの主張が混ざっている。一つは、解を有限個の初等関数と積分の組み合わせ（求積）で書けないという主張である。もう一つは、そもそも条件を満たす関数が存在しないという主張である。前者は表現の問題、後者は存在の問題で、両者はまったく別物である。

前者の典型は Riccati 方程式 $y' = x^2 + y^2$ で、Liouville はこれが求積では解けないことを示した。それでもこの方程式の解は存在し、実際には Bessel 関数を使って書ける。「閉じた式」の範囲をどこまで広げるかで、解けるかどうかの判定は変わる。三体問題も同じで、一般の初期条件に対して軌道を既知の関数で書く方法は無いが、衝突が起きない間は解が存在して一意であることは、次節の Picard – Lindelöf の定理から直ちに従う。

物理の近似について考えるとき、問題にすべきは後者の側である。近似解が「真の解」に近いと言うには、まず真の解が存在して意味をもっていなければならない。真の解が存在しない（あるいは一意でない）方程式を近似しても、近似解が何に近いのかが定まらない。

定性的理論という発想

Poincaré は天体力学（三体問題）の研究の中で、解を式で書くことを諦め、解の集合の幾何学的な性質（周期軌道があるか、軌道が有界か、どこへ近づくか）を直接調べる方法を始めた。これが微分方程式の**定性的理論**である。「解を書かずに性質を調べる」というこの発想は、この巻全体の基調でもある。物理の近似を数学から意味づけるとは、多くの場合、真の解を書かないまま「近似解と真の解の距離が小さい」ことを示すことだからである。

2.1.2 Hadamard の適切性

定義 2.1 (適切性)**.** 微分方程式の問題（初期値問題や境界値問題）が**適切**（well-posed）であるとは、次の 3 条件がすべて成り立つことをいう。

1. **存在**：与えられたデータ（初期値、境界値、外力など）に対して解が存在する。
2. **一意性**：解はただ一つである。
3. **データへの連続依存**：データを少し変えると、解も少ししか変わらない。

どれか一つでも破れる問題を**非適切**（ill-posed）という。

3 条件の意味は物理の側から読むとわかりやすい。存在と一意性が無ければ「この初期状態からの時間発展」という言葉が意味をもたない。第 3 の連続依存が無ければ、測定誤差や丸め誤差を含むデータから計算した解は、真の解と何の関係も無くなる。物理で使う方程式が「正しい」と言えるのは、この 3 条件を満たすときに限られる。注意すべき点として、第 3 条件の「少し」は何で測るか（どのノルムか）を指定して初めて意味をもつ。この「何で測るか」が第 2.5 節以降の主題になる。

例（Hadamard の例：連続依存の破れ） 平面の上半分 $y>0$ で Laplace 方程式 $u_{xx}+u_{yy}=0$ を考え、$y=0$ で u と u_y の両方を与える（Cauchy 問題）。データ $u(x,0)=0$、$u_y(x,0)=\sin(nx)/n$ に対する解は

$$u_n(x,y)=\frac{\sinh(ny)\sin(nx)}{n^2}$$

である。$n\to\infty$ でデータは一様に 0 へ近づく（振幅 $1/n$）のに、$y=1$ での解の振幅は $\sinh(n)/n^2$ で指数関数的に大きくなる。$n=10$ でデータの振幅は 0.1、$y=1$ での振幅は約 110 である（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。データ 0 に対する解は $u=0$ なので、データがいくら 0 に近くても解は 0 に近くない。存在も一意性も成り立つが、連続依存が破れている。

同じ型の破れは、時間を逆向きに解く熱方程式（拡散を巻き戻す問題）でも起こる。高い波数の成分ほど速く減衰する方程式を逆に解けば、高い波数の成分ほど速く増幅されるからである。物理の「逆問題」（観測から原因を推定する問題）が難しいのは、多くがこの意味で非適切だからである。

例題 2.1　時間を巻き戻す熱方程式の非適切性 ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

区間 $(0,\pi)$ の熱方程式 $u_t=u_{xx}$、境界条件 $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ を考える。

1. 初期値 $u(x,0)=\sin(nx)/n$ に対する解を求め、時刻 $T>0$ での振幅が初期値の振幅以下であることを示せ。
2. 逆に、時刻 T での値 $u(x,T)=\sin(nx)/n$ が与えられたとき、時刻 0 での値を求めよ。$T=0.1$、$n=10$ のときの時刻 0 での振幅を数値で答えよ。
3. 時刻 $T=0.1$ の観測値の各正弦係数に、大きさ 10^{-3} までの誤差が含まれているとする。時刻 0 へ巻き戻したときに第 n 成分の誤差が 1 以下に収まる最大の n を求め、この問題が Hadamard の意味で非適切であることと結びつけて説明せよ。

解答. **(1)** $u=\mathrm{e}^{-n^2t}\sin(nx)/n$ とおくと $u_t=-n^2u$、$u_{xx}=-n^2u$ で方程式を満たし、$x=0,\pi$ で 0 になる。時刻 T での振幅は $\mathrm{e}^{-n^2T}/n\le 1/n$ で、初期値の振幅以下である。一般の初期値は正弦級数 $\sum_n b_n\sin(nx)$ に展開でき、各係数が時刻 T までに $\mathrm{e}^{-n^2T}\le 1$ 倍されるだけなので、Parseval の等式から $\|u(\cdot,T)\|\le\|u(\cdot,0)\|$ である。前向きの問題では、初期値の誤差は時間とともに大きくならない（第 2.5 節のエネルギー法と同じ結論である）。
(2) 時刻 0 の値を $c\sin(nx)$ とすると、(1) により時刻 T の値は $c\,\mathrm{e}^{-n^2T}\sin(nx)$ なので、$c=\mathrm{e}^{n^2T}/n$、すなわち $u(x,0)=\mathrm{e}^{n^2T}\sin(nx)/n$ である。$T=0.1$、$n=10$ では振幅は $\mathrm{e}^{10}/10\approx 2202.6$ で、時刻 T でのデータの振幅 0.1 の約 2.2×10^4 倍になる（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。
(3) 問題は線形なので、時刻 T の第 n 係数の誤差 $\delta=10^{-3}$ は、時刻 0 では $\mathrm{e}^{n^2T}\delta$ になる。$\mathrm{e}^{0.1n^2}\times10^{-3}\le 1$ は $n^2\le 10\ln 1000\approx 69.1$ と同値なので、最大の n は 8 である。実際 $n=8$ では誤差は約 0.60、$n=9$ では約 3.3 になる。増幅率 e^{n^2T} には上限が無いので、データの誤差をどれほど小さくしても、それを何倍にも増幅する高い波数の成分が必ずある。データへの連続依存が破れているのである。さらに、時刻 T のデータの係数が e^{-n^2T} より速く減っていなければ巻き戻した級数は収束しないので、存在も一般には成り立たない。観測から復元できるのは低い波数の成分だけで、実際の逆問題では高い波数を切り捨てる（正則化する）ことで問題を適切なものに作り替えて扱う。

2.2 常微分方程式の存在と一意性

★★★ 最重要 縮小写像の不動点として解を作る論法は、近似列が収束することの最も単純な証明であり、後の章の反復法の原型

2.2.1 縮小写像とバナッハの不動点定理

微分方程式 $y' = F(t, y)$、$y(t_0) = y_0$ は、両辺を積分すると

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\,\mathrm{d}s \tag{2.1}$$

という**積分方程式**に書き換えられる。右辺を関数 y から関数を作る写像 T とみると、解とは $Ty = y$ を満たす y、すなわち T の**不動点**である。そこで「写像を繰り返し当てると一点に集まる」ための条件を一般の形で用意する。

定義 2.2 (距離空間の完備性と縮小写像)**.** 集合 X に距離 d が入っているとする。点列 (x_n) が**コーシー列**であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し N があって $m, n \geq N$ なら $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ となることをいう。すべてのコーシー列が X の中に極限をもつとき、X は**完備**であるという。写像 $T : X \to X$ が**縮小写像**であるとは、ある $0 \leq q < 1$ があって、すべての $x, y \in X$ に対し $d(Tx, Ty) \leq q\, d(x, y)$ となることをいう。

完備性は「互いに近づいていく列は、どこかへ収束する」という性質である。有理数の集合は完備でない（$\sqrt{2}$ に近づく有理数の列は有理数の中に極限をもたない）が、実数は完備である。この章では完備性が何度も決定的な役割を果たす。

定理 2.3 (バナッハの不動点定理 ★★★ 最重要)**.** X を完備な距離空間、$T : X \to X$ を縮小率 $q < 1$ の縮小写像とする。このとき T はただ一つの不動点 x^* をもつ。さらに任意の初期点 x_0 から作った列 $x_{n+1} = Tx_n$ は x^* に収束し、

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1 - q}\, d(x_1, x_0) \tag{2.2}$$

が成り立つ。

証明. 縮小性を繰り返し使うと $d(x_{k+1}, x_k) \leq q^k d(x_1, x_0)$ である。$m > n$ のとき三角不等式から

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1 - q} d(x_1, x_0)$$

となり、右辺は $n \to \infty$ で 0 に近づくので (x_n) はコーシー列である。X は完備なので極限 x^* がある。縮小写像は連続（$d(Tx, Ty) \leq q\, d(x, y)$）なので、$x_{n+1} = Tx_n$ の両辺で極限をとると $x^* = Tx^*$ を得る。上の不等式で $m \to \infty$ とすれば (2.2) が出る。不動点が二つ x^*, y^* あれば $d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq q\, d(x^*, y^*)$ で、$q < 1$ より $d(x^*, y^*) = 0$ である。 □

この定理は単なる存在定理ではない。(2.2) は「n 回反復した近似解が真の解からどれだけ離れているか」を、真の解を知らないまま計算できる量 $d(x_1, x_0)$ で上から抑えている。近似の誤差評価の最も単純な形がここにある。また、証明の中で極限 x^* の存在を保証したのは完備性だけである。完備でない空間では、近似列がコーシー列になっても行き先が空間の外にあるかもしれない。

2.2.2 Picard–Lindelöf の定理

定理 2.4 (Picard–Lindelöf ★★★ 最重要)**.** $F(t,y)$ は $R=\{(t,y):|t-t_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\}$ ($y\in\mathbb{R}^d$) で連続で、$|F|\le M$ を満たし、さらに y について ***Lipschitz* 連続**、すなわちある L があって

$$|F(t,y)-F(t,z)|\le L|y-z| \qquad ((t,y),(t,z)\in R)$$

を満たすとする。$h=\min\{a,\ b/M,\ 1/(2L)\}$ とおくと、初期値問題 $y'=F(t,y)$、$y(t_0)=y_0$ は区間 $I=[t_0-h,t_0+h]$ でただ一つの解をもつ。

証明. X を、I 上の連続関数で値が $|y(t)-y_0|\le b$ に収まるもの全体とし、距離を $d(y,z)=\max_{t\in I}|y(t)-z(t)|$ (一様ノルムの距離) で入れる。連続関数の一様収束極限は連続で、$|y-y_0|\le b$ も極限で保たれるので、X は完備である（実数の完備性を各 t ごとに使い、一様性で連続性を受け渡す)。
T を積分方程式 (2.1) の右辺で定める。$y\in X$ なら Ty は連続で、$|(Ty)(t)-y_0|\le M|t-t_0|\le Mh\le b$ なので $Ty\in X$ である。さらに

$$|(Ty)(t)-(Tz)(t)|\le\Bigl|\int_{t_0}^{t}|F(s,y(s))-F(s,z(s))|\,\mathrm{d}s\Bigr|\le Lh\,d(y,z)\le\tfrac12 d(y,z)$$

なので T は縮小率 $1/2$ の縮小写像である。定理 2.3 により T はただ一つの不動点をもつ。不動点は連続関数の積分で表されるので微分可能で、微分すれば $y'=F(t,y)$、$y(t_0)=y_0$ を満たす。逆に I 上の解はどれも、$|y'|\le M$ から $|y(t)-y_0|\le Mh\le b$ を満たして X に属し、積分すれば T の不動点になるので、解は一つしかない。 □

条件 $h\le 1/(2L)$ は証明を短くするための便宜で、重みつきのノルム $\max_t \mathrm{e}^{-2L|t-t_0|}|y(t)-z(t)|$ を使えば外せる。外せないのは $h\le b/M$ のほうで、これは「解が F の定義された範囲 R から出ていかない時間」を表している。次の有限時間爆発の例では、この時間制限が実際に問題になる（解はある時刻で無限大へ逃げる)。

例題 2.2　Picard 反復を具体的に回す ★★ 重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

初期値問題 $y'=y$、$y(0)=1$ について、$\varphi_0(t)=1$、$\varphi_{n+1}(t)=1+\int_0^t\varphi_n(s)\,\mathrm{d}s$ で Picard 反復を作る。

1. $\varphi_n(t)=\sum_{k=0}^{n}t^k/k!$ であることを示せ。
2. $t\ge 0$ で $|\mathrm{e}^t-\varphi_n(t)|\le \mathrm{e}^t\,t^{n+1}/(n+1)!$ を示し、$t=1$ で $n=1,2,4,6,8$ の誤差と上界を比べよ。
3. 区間 $[0,h]$ での縮小率を求め、反復が $h\ge 1$ でも収束する理由を説明せよ。

解答. **(1)** n についての帰納法による。$\varphi_0=1$ は $n=0$ の式である。$\varphi_n=\sum_{k\le n}t^k/k!$ と仮定すると $\varphi_{n+1}(t)=1+\sum_{k\le n}\int_0^t s^k/k!\,\mathrm{d}s=1+\sum_{k\le n}t^{k+1}/(k+1)!=\sum_{k\le n+1}t^k/k!$ である。反復は指数関数の Taylor 級数を 1 項ずつ作っている。
(2) Taylor の定理（Lagrange の剰余）により、ある $\theta\in(0,t)$ で $\mathrm{e}^t-\varphi_n(t)=\mathrm{e}^{\theta}t^{n+1}/(n+1)!$ となり、$\mathrm{e}^{\theta}\le\mathrm{e}^t$ から評価が出る。$t=1$ では次のようになる（検算 `scripts/verify_ch02.py`)。

n	誤差 $\mathrm{e}-\varphi_n(1)$	上界 $\mathrm{e}/(n+1)!$
1	7.18×10^{-1}	1.36
2	2.18×10^{-1}	4.53×10^{-1}
4	9.95×10^{-3}	2.27×10^{-2}
6	2.26×10^{-4}	5.39×10^{-4}
8	3.06×10^{-6}	7.49×10^{-6}

上界は実際の誤差の 2 倍程度に収まっていて、評価は粗くない。
(3) $F(t,y)=y$ の Lipschitz 定数は $L=1$ で、$[0,h]$ の一様ノルムで $|(Ty)(t)-(Tz)(t)| \le \int_0^t |y-z| \le h\,d(y,z)$ だから縮小率は h である。$h<1$ なら定理 2.3 がそのまま使える。$h \ge 1$ でも収束するのは、n 回反復した差が $|T^n y - T^n z| \le (t^n/n!)\,d(y,z)$ と、$n!$ の分母のために最終的には縮小するからである（T^n が縮小写像になる）。上で述べた重みつきノルムはこの事情を 1 回の反復で捉えるための工夫である。

2.2.3 Lipschitz 性が破れるとき：非一意性と有限時間爆発

定理 2.4 の二つの仮定（Lipschitz 性と有界性）は、どちらも飾りではない。それぞれが破れる例を見る。

例（非一意性：$y'=\sqrt{|y|}$） $y(0)=0$ に対し、$y\equiv 0$ は解である。一方、任意の $c\ge 0$ に対し

$$y_c(t)=\begin{cases} 0 & (t\le c)\\ (t-c)^2/4 & (t>c)\end{cases}$$

も解である（$t>c$ で $y_c'=(t-c)/2=\sqrt{y_c}$、$t=c$ で左右の微分がともに 0）。解は無数にある。原因は $F(y)=\sqrt{|y|}$ が $y=0$ で Lipschitz でないこと（$\sqrt{|y|}/|y|\to\infty$）である。物理的には、頂上でちょうど静止した粒子が「いつ転がり始めるか」が方程式から決まらない状況に当たる。

例（有限時間爆発：$y'=y^2$） $y(0)=y_0>0$ の解は $y(t)=y_0/(1-y_0 t)$ で、$t\to 1/y_0$ で無限大に発散する。$F(y)=y^2$ は各有界集合の上では Lipschitz なので、局所的な存在と一意性は定理 2.4 で保証されるが、$|F|\le M$ を満たす範囲 R を広げるほど M が大きくなって保証される時間 b/M が縮み、解は有限時間で R の外へ出ていく。$y_0=1$ の数値解は $t=0.99$ で $y=100$ に達する（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。

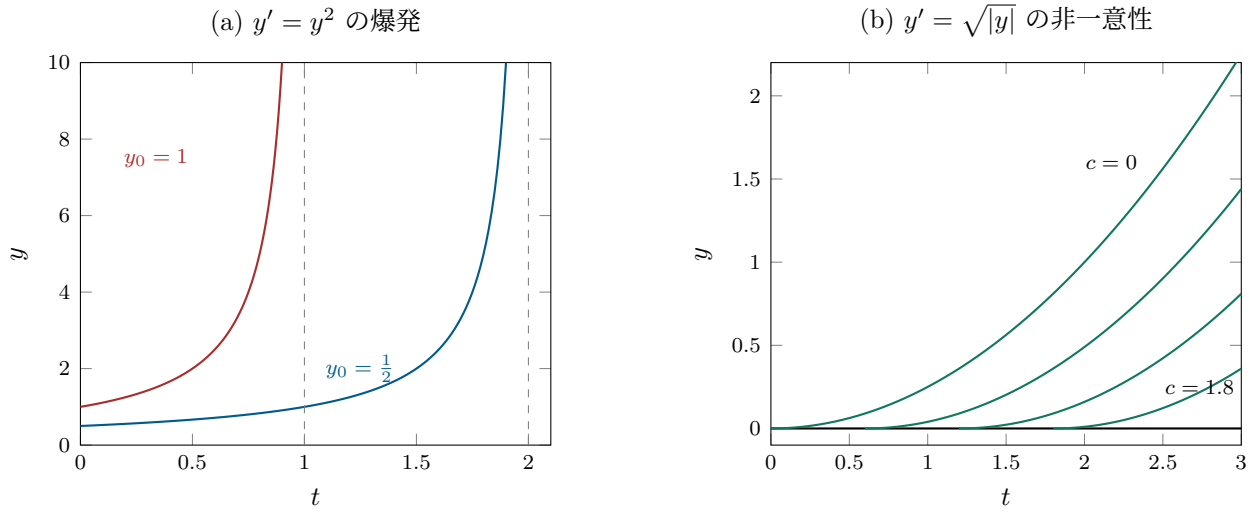


図 2.1　(a) $y'=y^2$ の解は $t=1/y_0$（破線）で発散する。(b) $y'=\sqrt{|y|}$、$y(0)=0$ の解は $y\equiv 0$ のほかに、任意の時刻 c で離陸する y_c がある。

二つの例は、物理の模型でも実際に問題になる。非一意性は、摩擦の法則や接触の模型など滑らかでない力を入れたときに起こる。爆発は、非線形の自己相互作用が強い方程式（重力崩壊、非線形 Schrödinger 方程式の自己収束、流体の渦の伸長）で起こりうる。近似の観点から重要なのは、「近似方程式が爆発するのは真の現象か、近似の副作用か」という問いが立つことで、これには次節以降の誤差評価とアプリオリ評価で答える。

2.3 Grönwall の不等式とデータへの連続依存

★★★ 最重要 近似解と真の解の距離を測るすべての評価の原型。第 6 章・第 7 章の誤差評価はこの不等式の変奏である

2.3.1 Grönwall の不等式

補題 2.5 (Grönwall の不等式 ★★★ 最重要)**.** $u(t)$ を $[0,T]$ 上の非負連続関数、$a,b\ge 0$、$L>0$ とする。

$$u(t)\le a+\int_0^t \bigl(b+L\,u(s)\bigr)\mathrm{d}s \qquad (0\le t\le T)$$

ならば

$$u(t)\le a\,\mathrm{e}^{Lt}+\frac{b}{L}\bigl(\mathrm{e}^{Lt}-1\bigr) \qquad (0\le t\le T). \tag{2.3}$$

証明. まず $b=0$ の場合を示す。$W(t)=a+L\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s$ とおくと W は微分可能で、仮定 $u\le W$ から $W'(t)=Lu(t)\le LW(t)$ である。したがって $\bigl(\mathrm{e}^{-Lt}W(t)\bigr)'=\mathrm{e}^{-Lt}(W'-LW)\le 0$ となり、$\mathrm{e}^{-Lt}W(t)\le W(0)=a$、つまり $u(t)\le W(t)\le a\mathrm{e}^{Lt}$ を得る。一般の b に対しては $v=u+b/L$ とおくと、仮定は $v(t)\le (a+b/L)+L\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s$ となる。$b=0$ の場合を v に当てはめると $v\le (a+b/L)\mathrm{e}^{Lt}$、移項して (2.3) を得る。 □

この不等式の中身は、「自分自身に比例する速さでしか増えない量は、指数関数より速くは増えない」ということである。微分の形 $u'\le b+Lu$ なら比較で当たり前に見えるが、積分の形で述べておくと、u が微分できない場合（ノルムの差など）にも使える点が重要である。

2.3.2 データへの連続依存と誤差評価

定理 2.6 (連続依存と誤差評価 ★★★ 最重要)**.** F は $\mathbb{R}^d$ 上で *Lipschitz* 定数 L をもつとする。y を $y'=F(y)$ の解、z を摂動を受けた方程式 $z'=F(z)+r(t)$（$|r(t)|\le\delta$）の解とすると、

$$|y(t)-z(t)|\le |y(0)-z(0)|\,\mathrm{e}^{Lt}+\frac{\delta}{L}\bigl(\mathrm{e}^{Lt}-1\bigr). \tag{2.4}$$

証明. $w=y-z$ は $w(t)=w(0)+\int_0^t\bigl(F(y)-F(z)-r\bigr)\mathrm{d}s$ を満たすので、$|w(t)|\le |w(0)|+\int_0^t\bigl(\delta+L|w(s)|\bigr)\mathrm{d}s$ である。補題 2.5 を $u=|w|$、$a=|w(0)|$、$b=\delta$ で使えばよい。 □

$\delta=0$ とすれば、初期値の差が e^{Lt} 倍以上には広がらないこと、すなわち Hadamard の第 3 条件（データへの連続依存）が出る。$y(0)=z(0)$ とすれば一意性も同時に出る。

誤差評価の原型：残差と安定性

定理 2.6 は近似の理論で何度も現れる型をしている。z を「近似解」、r を近似解を真の方程式に代入したときの**残差**（方程式をどれだけ満たしていないか）とみると、(2.4) は

（真の解と近似解の距離）≤（初期データの差）×（増幅率）＋（残差の大きさ）×（増幅率）

と読める。近似を正当化する仕事は、多くの場合この二つの因子に分かれる。一つは**残差が小さいこと**（近似方程式が真の方程式をほぼ満たすこと。数値解析では**整合性**と呼ぶ）、もう一つは**増幅率が制御できること**（真の方程式が小さな誤差を爆発的に増やさないこと。**安定性**と呼ぶ）である。どちらか片方だけでは近似は正当化されない。線形の差分スキームについてこの「整合性＋安定性＝収束」を定式化したものが Lax の同値定理である。第 6 章の平均場極限の古典的な証明（Lipschitz な相互作用の場合）は、この型の評価を粒子の経験分布と平均場の解の距離に対して行う。第 7 章の断熱近似の誤差評価も、残差を見積もって Grönwall 型の議論で解の差へ移す。

落とし穴

増幅率 e^{Lt} は悲観的すぎると思うかもしれないが、一般には改善できない。カオス的な系では近い初期値から出た軌道の差が実際に指数関数的に広がり（Lyapunov 指数が正）、天気予報に原理的な期限があるのはこのためである。逆に、系に構造（保存量、反対称性）があると増幅率を大幅に下げられる。次の例題がその例である。物理の近似が「長時間でも使える」と言えるのは、多くの場合この構造のおかげであり、Grönwall の一般論からは出てこない。

例題 2.3　摂動を受けた振動子：粗い評価と構造を使う評価 ★★★ 最重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

$U=(x,v)$ に対する二つの系

$$\text{(P)}\quad x'=v,\ v'=-x+\varepsilon\sin x,\qquad \text{(H)}\quad x'=v,\ v'=-x$$

を同じ初期値 $(1,0)$ から解き、差 $w=U_{\mathrm{P}}-U_{\mathrm{H}}$ を評価する（$|\cdot|$ は $\mathbb{R}^2$ のユークリッドノルム）。

1. 定理 2.6 の型の議論で $|w(t)|\le\varepsilon(\mathrm{e}^t-1)$ を示せ。
2. 調和振動子の右辺 $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ が反対称であることを使い、$|w(t)|\le\varepsilon t$ を示せ。
3. $\varepsilon=0.1$ で二つの上界を実際の差と比べ、どちらの評価が物理的に意味をもつか述べよ。

解答. **(1)** $w'=Aw+\varepsilon g$、$g=(0,\sin x_{\mathrm{P}})$ で、$|Aw|=|w|$、$|g|\le 1$ である。積分して $|w(t)|\le\int_0^t(\varepsilon+|w|)\,\mathrm{d}s$ となり、補題 2.5（$a=0$、$b=\varepsilon$、$L=1$）から $|w(t)|\le\varepsilon(\mathrm{e}^t-1)$。
(2) A が反対称なので $w\cdot Aw=0$ である。したがって $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|^2=2w\cdot(Aw+\varepsilon g)=2\varepsilon\,w\cdot g\le 2\varepsilon|w|$。$|w|^2$ の増え方が $|w|$ に比例する上限で抑えられるので、$|w|\neq 0$ の区間で $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|\le\varepsilon$、$w(0)=0$ から積分して $|w(t)|\le\varepsilon t$ を得る（$|w|=0$ となる時刻をまたいでも、$\sqrt{|w|^2+\eta^2}$ を使って $\eta\to 0$ とすれば同じ結論になる）。反対称性は調和振動子の流れが回転であり、誤差の長さを変えないことの表現である。
(3) 数値解との比較は次のとおり（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。

t	実際の差 $\lvert w\rvert$	構造を使う上界 εt	粗い上界 $\varepsilon(\mathrm{e}^t-1)$
0.5	0.0406	0.05	0.065
1	0.0719	0.1	0.172
2	0.0847	0.2	0.639
5	0.2215	0.5	14.7
10	0.4512	1.0	2203

粗い上界は $t=5$ で既に相空間の大きさ（$|U|\approx 1$）を超え、何も言っていない。構造を使う上界は実際の差の 2 倍程度にとどまり、「摂動の影響は時間に比例してしか蓄積しない」という物理的に正しい描像を与える。

2.4　相空間と定性的解析

★★ 重要　エネルギーの減少・保存から安定性と大域存在を言う論法は、PDE のエネルギー法とアプリオリ評価にそのまま持ち上がる

2.4.1 平衡点・線形化・Lyapunov 関数

自励系 $y' = F(y)$（$y \in \mathbb{R}^d$）の解は、$\mathbb{R}^d$（**相空間**）の中の曲線（軌道）として描ける。$F(y^*) = 0$ となる点 y^* を**平衡点**という。$y^* = 0$ として、平衡点が**安定**であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ があって $|y(0)| < \delta$ なら全時刻で $|y(t)| < \varepsilon$ となることをいう。さらに $y(t) \to 0$ となるとき**漸近安定**という。

解を書かずに安定性を判定する道具が、Lyapunov が導入した関数である。

定理 2.7（Lyapunov の安定性定理 ★★ 重要）. V を 0 の近傍 B で定義された C^1 関数で、$V(0) = 0$、$y \neq 0$ で $V(y) > 0$ とする。軌道に沿った微分 $\dot V(y) = \nabla V(y) \cdot F(y)$ が B で $\dot V \le 0$ なら、0 は安定である。

証明. $\varepsilon > 0$ を $\{|y| \le \varepsilon\} \subset B$ となるようにとり、$m = \min_{|y|=\varepsilon} V(y) > 0$ とおく（有界閉集合上の連続関数の最小値）。V は連続で $V(0) = 0$ なので、$\delta > 0$ を $|y| < \delta$ で $V(y) < m$ となるようにとれる。$|y(0)| < \delta$ の解は $\dot V \le 0$ により $V(y(t)) \le V(y(0)) < m$ を保つので、球面 $|y| = \varepsilon$（そこでは $V \ge m$）に到達できない。 □

物理では V としてエネルギーをとるのが自然である。減衰振動子 $x'' + \gamma x' + x = 0$（$\gamma > 0$）で $E = (x^2 + v^2)/2$ とすると $\dot E = -\gamma v^2 \le 0$ であり（検算 `scripts/verify_ch02.py`）、原点は安定である。「摩擦でエネルギーが減るから止まる」という物理の直観が、そのまま定理の仮定になっている。

平衡点の近くで $F(y) = Ay + \mathcal{O}(|y|^2)$（$A$ は F のヤコビ行列）と展開して $y' = Ay$ に置き換えるのが**線形化**で、これは物理で最もよく使う近似の一つである。線形化が非線形の安定性を正しく判定する条件は、次のように Lyapunov 関数で証明できる。

命題 2.8（線形化による漸近安定性 ★★ 重要）. A のすべての固有値の実部が負なら、0 は $y' = F(y)$ の漸近安定な平衡点で、近くから出た解は指数関数的に 0 に近づく。

証明. $P = \int_0^\infty \mathrm{e}^{A^{\mathsf T} t} \mathrm{e}^{At}\, \mathrm{d}t$ とおく。固有値の実部が負なので $\|\mathrm{e}^{At}\|$ は指数関数的に減衰し、積分は収束する。P は対称正定値で、$A^{\mathsf T}P + PA = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{e}^{A^{\mathsf T}t}\mathrm{e}^{At}\big)\mathrm{d}t = -I$ を満たす。$V(y) = y^{\mathsf T}Py$ とすると、$F(y) = Ay + r(y)$、$|r(y)| \le C|y|^2$ として

$$\dot V = y^{\mathsf T}(A^{\mathsf T}P + PA)y + 2y^{\mathsf T}Pr(y) \le -|y|^2 + 2\|P\|C|y|^3.$$

$|y| \le 1/(4\|P\|C)$ の範囲では $\dot V \le -\tfrac12|y|^2 \le -V/(2\|P\|)$ となり、V は指数関数的に減る（範囲から出ないことは定理 2.7 の議論と同じ）。V は $|y|^2$ と同等なので $|y|$ も指数関数的に減る。 □

線形化で決まらない場合

固有値に実部 0 のものがあると、線形化は安定性を判定できない。$y' = -y^3$ と $y' = y^3$ はどちらも線形化すると $y' = 0$ だが、前者は 0 に近づき後者は有限時間で爆発する。保存系（Hamilton 系）の平衡点は固有値が虚軸上に並ぶのが典型なので、線形化だけで「安定」と結論するのは危険である。物理で「小振動の近似」を使うとき、正当化に要るのは線形化そのものでなく、エネルギー保存などの非線形の構造である。

2.4.2 保存量による閉じ込めとアプリオリ評価

保存量があると、軌道はその等位面に閉じ込められる。たとえば $x'' = -x^3$ は $E = v^2/2 + x^4/4$ を保存するので（検算 `scripts/verify_ch02.py`）、軌道は閉曲線 $E =$ 一定 の上を動き、$|x| \le (4E)^{1/4}$、$|v| \le \sqrt{2E}$ に留まる。$F(x, v) = (v, -x^3)$ は大域的に Lipschitz でない（$y' = y^2$ と同じ型の非線形性をもつ）にもかかわらず、この閉じ込めのために解は爆発しない。このことを一般の形で述べる。

定理 2.9（アプリオリ評価による大域存在 ★★★ 最重要）. F は $\mathbb{R}^d$ の各有界集合上で *Lipschitz* であるとする。初期値問題 $y' = F(y)$、$y(0) = y_0$ の解が存在する最大の区間を $[0, T^*)$ とする。

もし「解が存在する限り $|y(t)| \le K$」という評価が、解の存在を仮定した上で（解を知らずに）示せるなら、$T^* = \infty$ である。

証明. 球 $|y| \le K+1$ 上の $|F|$ の上限を M、Lipschitz 定数を L とする。定理 2.4 を、$|y_1| \le K$ を満たす任意の点 y_1 を初期値として $b = 1$ で使うと、解は少なくとも時間 $h = \min\{1/M, 1/(2L)\}$ だけ存在する。h は y_1 によらない。$T^* < \infty$ と仮定し、時刻 $T^* - h/2$ の値 $y(T^* - h/2)$（評価により $|\cdot| \le K$）から出発し直すと、解は $T^* + h/2$ まで延び、一意性により元の解とつながる。これは T^* の最大性に反する。 □

アプリオリ評価という考え方

「アプリオリ」とは「解を求める前に」という意味である。論法は二段に分かれる。(i) 局所存在：短い時間なら解はある（縮小写像）。(ii) アプリオリ評価：解があると仮定して、その大きさを保存量や減少するエネルギーで上から抑える。(ii) の評価が局所存在の時間を一様に保つので、(i) を繰り返して解を延ばせる。爆発するのは、(ii) の評価が得られないときに限られる。この論法は偏微分方程式でもそのまま使われ、問題の難しさは「どのノルムでアプリオリ評価が取れるか」に集約される。たとえば非圧縮 Navier–Stokes 方程式では、エネルギー（速度の L^2 ノルム）の評価は常に取れるが、3 次元ではそれだけで滑らかさを制御するノルムを抑えきれず、滑らかな解の大域存在は未解決である。

例題 2.4　線形化で決まらない平衡点を Lyapunov 関数で調べる ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

二つの方程式 $y' = -y^3$ と $y' = y^3$（$y \in \mathbb{R}$）を考える。

1. 両者の平衡点 0 での線形化を求め、命題 2.8 が使えない理由を述べよ。
2. $V(y) = y^2/2$ を使って、$y' = -y^3$ の原点が安定であることと、任意の初期値に対して解が全時刻で存在することを示せ。
3. 両方程式を初期値 $y(0) = y_0 > 0$ で解け。$y_0 = 0.1$ について、$y' = -y^3$ の解が $y_0/2$ になる時刻と、$y' = y^3$ の解が爆発する時刻を求め、$y' = -y$ の解が半分になる時刻と比べよ。

解答. **(1)** $F(y) = \mp y^3$ のヤコビ行列（ここでは微分）は $F'(0) = 0$ なので、どちらも線形化は $y' = 0$ で、固有値は 0 である。命題 2.8 は固有値の実部がすべて負であることを仮定しているので使えない。線形化した方程式ではすべての y が動かないので、近くの解が 0 に近づくのか遠ざかるのかについて何も言えない。
(2) $y' = -y^3$ の解に沿って $\dot V = y \cdot (-y^3) = -y^4 \le 0$ である。$V(0) = 0$、$y \neq 0$ で $V > 0$ なので、定理 2.7 により原点は安定である。さらに $\dot V \le 0$ から、解が存在する限り $|y(t)| \le |y_0|$ が、解を求めずに言える。$F(y) = -y^3$ は各有界集合上で Lipschitz なので、定理 2.9 を $K = |y_0|$ で使えば、解は全時刻で存在する。
(3) $y' = -y^3$ は $(y^{-2})' = -2y^{-3}y' = 2$ と書けるので、$y^{-2} = y_0^{-2} + 2t$、すなわち

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1 + 2y_0^2 t}}.$$

$y = y_0/2$ となるのは $1 + 2y_0^2 t = 4$、つまり $t = 3/(2y_0^2) = 150$ のときである。$y' = y^3$ では同様に $y^{-2} = y_0^{-2} - 2t$ で、

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1 - 2y_0^2 t}}$$

は $t = 1/(2y_0^2) = 50$ で無限大になる。$y' = -y$ の解が半分になる時刻は $\ln 2 \approx 0.69$ である（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。$y' = -y^3$ の解は 0 に近づくが、その速さは $1/\sqrt{2t}$ 程度の代数的なもので、線形化が漸近安定を保証する場合の指数関数的な減衰より桁違いに遅い。線形化が同じ $y' = 0$ になる二つの方程式が、一方は大域存在して 0 へ近づき、他方は有限時間で爆発す

る。どちらになるかを決めているのは線形化が捨てた 3 次の項の符号であり、それを拾えるのは $\dot V$ の符号を調べる Lyapunov 関数のほうである。

2.5 偏微分方程式へ：エネルギー法と関数空間

★★★ 最重要 関数を「ノルムで測った大きさ」で扱う理由と、完備性（近似列の極限が空間に残ること）の意味

2.5.1 熱方程式のエネルギー法

ODE で使った「エネルギーが減るから解は制御できる」という論法を偏微分方程式に持ち上げる。$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界領域とし、熱方程式

$$\partial_t u = \Delta u \quad (x \in \Omega,\ t > 0), \qquad u = 0 \quad (x \in \partial\Omega), \qquad u(x,0) = u_0(x) \tag{2.5}$$

を考える。「エネルギー」として $\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x$ をとる。

定理 2.10 (熱方程式のエネルギー法 ★★★ 最重要)**.** (2.5) の滑らかな解は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

を満たす。したがって解は一意であり、後で示す *Poincaré* 不等式（定理 *2.16*）の定数を C_P とすると

$$\Big(\int_\Omega u(x,t)^2 \mathrm{d}x\Big)^{1/2} \le \mathrm{e}^{-t/C_P^2}\Big(\int_\Omega u_0^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

証明. 両辺に u を掛けて積分し、Green の公式（部分積分）$\int_\Omega u\Delta u = \int_{\partial\Omega} u\,\partial_n u - \int_\Omega |\nabla u|^2$ を使う。境界で $u=0$ なので境界項は消え、第 1 式を得る。一意性：二つの解の差 w は初期値 0 の (2.5) を満たし、$\int w^2$ は増えないので恒等的に 0 である。減衰：Poincaré 不等式 $\int u^2 \le C_P^2 \int |\nabla u|^2$ を使うと $E(t) = \frac{1}{2}\int u^2$ について $E' \le -2E/C_P^2$、よって $E(t) \le \mathrm{e}^{-2t/C_P^2}E(0)$ である。 □

証明に解の具体形は一切現れない。使ったのは部分積分と一つの不等式だけである。同じ計算を時間反転した熱方程式 $\partial_t u = -\Delta u$ に行うと $E' = +\int|\nabla u|^2 \ge 0$ となり、エネルギーは増える。第 1 節で述べた逆向き熱方程式の非適切性が、ここでは符号一つの違いとして現れている。

例題 2.5　区間上の熱方程式でエネルギー減衰を確かめる ★★ 重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

$\Omega = (0,\pi)$、$u_0(x) = x(\pi - x)$ とする。

1. u_0 の正弦展開 $u_0 = \sum_n b_n \sin(nx)$ を求め、解 $u(x,t)$ を書け。
2. $\|u(t)\|^2 = \int_0^\pi u^2 \mathrm{d}x$ を係数で表し、$\|u(t)\|^2 \le \mathrm{e}^{-2t}\|u_0\|^2$ を確かめよ。この区間の Poincaré 定数は $C_P = 1$ である（定理 2.16）。
3. 減衰率 e^{-2t} がほぼ等号で成り立つ理由を述べよ。

解答. **(1)** $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$ を 2 回の部分積分で計算すると、n が奇数なら $b_n = 8/(\pi n^3)$、偶数なら 0 である。各モードは $\mathrm{e}^{-n^2 t}$ で減衰するので $u(x,t) = \sum_{n\text{奇数}} \frac{8}{\pi n^3}\mathrm{e}^{-n^2 t}\sin(nx)$。 **(2)** $\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}$ より $\|u(t)\|^2 = \frac{\pi}{2}\sum_n b_n^2 \mathrm{e}^{-2n^2 t}$。$n^2 \ge 1$ なので各項は $\mathrm{e}^{-2t}\cdot\frac{\pi}{2}b_n^2$ 以下で、和をとれば $\|u(t)\|^2 \le \mathrm{e}^{-2t}\|u_0\|^2$。$\|u_0\|^2 = \pi^5/30$ である。比 $\|u(t)\|^2/\|u_0\|^2$ と e^{-2t} は $t = 0.5$ で 0.36735 と 0.36788、$t = 2$ で 0.018289 と 0.018316 である（検算

`scripts/verify_ch02.py`）。
(3) 第 1 モードがノルムの $960/\pi^6 \approx 0.9986$ を占めるからである。減衰率の評価は最も遅いモード（最小固有値 $\lambda_1 = 1$）で決まり、Poincaré 定数は $C_P = 1/\sqrt{\lambda_1}$ という意味をもつ。エネルギー法は固有関数展開を使わずにこの最小固有値による減衰を取り出している。

2.5.2 関数を「ノルムで測った大きさ」で扱う理由

エネルギー法では、解 $u(\cdot,t)$ を各点の値の集まりとしてではなく、$\left(\int u^2\right)^{1/2}$ という一つの数で測った大きさとして扱った。この見方にはいくつかの理由がある。

第一に、物理で保存・散逸する量はほとんどが積分量である。エネルギー、質量、量子力学の確率 $\int|\psi|^2$ はいずれもそうで、方程式から直接制御できるのは点ごとの値でなく積分量である。第二に、近似は点ごとには収束しないことが多い。段差のある関数の Fourier 級数は段差の近くで行き過ぎ（Gibbs 現象）を起こし、一様には収束しないが、2 乗積分の意味では収束する。第三に、量子力学の波動関数は点ごとの値そのものに物理的意味がなく、意味をもつのは $|\psi|^2$ の積分（ある領域に粒子を見出す確率）である。値を測度ゼロの集合（たとえば 1 点）で変えても、物理は何も変わらない。

定義 2.11 (L^2 空間と内積)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上の関数 u で $\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x < \infty$ となるもの全体を $L^2(\Omega)$ と書く。ただし、測度ゼロの集合の上でしか違わない二つの関数は同じものとみなす。内積とノルムを

$$\langle u,\, v\rangle = \int_\Omega \overline{u}\, v \,\mathrm{d}x, \qquad \|u\| = \langle u,\, u\rangle^{1/2}$$

で定める（この巻では内積を第 1 引数について反線形とする。実数値関数なら複素共役は不要）。

ここでの積分は Lebesgue 積分である。測度論は既習でないので、この章では Lebesgue 積分について「Riemann 積分できる関数では値が一致する」「次の完備性が成り立つ」という二点だけを事実として使う。

定義 2.12 (ヒルベルト空間)**.** 内積をもつベクトル空間で、内積から作ったノルム $\|u\| = \langle u,\, u\rangle^{1/2}$ の距離 $d(u,v) = \|u - v\|$ について完備なものを**ヒルベルト空間**という。

$\mathbb{C}^d$、2 乗総和可能な数列の空間 ℓ^2、そして $L^2(\Omega)$ はヒルベルト空間である。$L^2(\Omega)$ の完備性（Riesz–Fischer の定理）の証明には Lebesgue 積分の収束定理が要り、それが Riemann 積分ではなく Lebesgue 積分を使う最大の理由である。

例（完備でない例：連続関数に 2 乗積分のノルムを入れる） $[0,1]$ 上の連続関数の空間に L^2 ノルムを入れる。u_n を、$x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ で 0、$x \ge \frac{1}{2}$ で 1、その間を直線でつないだ連続関数とする。$m > n$ なら u_m と u_n は幅 $1/n$ の区間でしか違わず、差は 1 以下なので $\|u_m - u_n\|^2 \le 1/n$ となり、(u_n) はコーシー列である。ところがその L^2 極限は階段関数で、連続関数ではない。連続関数の空間の中には行き先が無い。

なぜ完備性が要るか

近似の理論では、近似解の列 $u_1, u_2, \ldots$ を作り、それが互いに近づいていく（コーシー列になる）ことを示すのが典型的な手順である。完備な空間ならこの時点で極限 u の存在が保証され、u を「真の解」の候補にできる。完備でない空間では、近似列が収束しているように見えても、その極限が考えている関数のクラスに入っていないかもしれない。有理数で $\sqrt{2}$ を探すのと同じ状況である。物理の近似（基底を増やす、メッシュを細かくする、粒子数を増やす）が「何かに収束する」と言えるのは、近似を完備な空間の中に置いたときである。

ヒルベルト空間で最も基本的な定理は、閉じた部分空間への「最短距離の点」の存在で、その証明で完備性がちょうど一度使われる。

定理 2.13 (射影定理 ★★★ 最重要)**.** $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間、$V \subset \mathcal{H}$ を閉部分空間（V の中の点列の極限が V に属する部分空間）とする。任意の $x \in \mathcal{H}$ に対し、$\|x - v\|$ を最小にする $v^* \in V$ がただ一つ存在し、$x - v^*$ は V のすべての元と直交する。

証明. $m = \inf_{v \in V} \|x - v\|$ とし、$\|x - v_n\| \to m$ となる $v_n \in V$ をとる。中線定理 $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$ を $a = x - v_n$、$b = x - v_k$ に使うと

$$\|v_n - v_k\|^2 = 2\|x - v_n\|^2 + 2\|x - v_k\|^2 - 4\left\|x - \tfrac{v_n + v_k}{2}\right\|^2 \le 2\|x - v_n\|^2 + 2\|x - v_k\|^2 - 4m^2$$

（$(v_n + v_k)/2 \in V$ だから最後の項は $4m^2$ 以上）。右辺は $n, k \to \infty$ で 0 に近づくので (v_n) はコーシー列で、**完備性**により極限 v^* をもち、V が閉なので $v^* \in V$、連続性から $\|x - v^*\| = m$ である。一意性は同じ不等式で v_n, v_k を二つの最小点に置き換えれば出る。直交性：任意の $w \in V$ と実数 s に対し $\|x - v^* - sw\|^2 \ge m^2$ なので、s の 2 次関数 $m^2 - 2s\,\mathrm{Re}\langle w, x - v^*\rangle + s^2\|w\|^2$ が $s = 0$ で最小となり、$\mathrm{Re}\langle w, x - v^*\rangle = 0$。$w$ を $\mathrm{i}w$ に替えれば虚部も 0 である。 □

この定理は第 4 章の Galerkin 法・Rayleigh–Ritz 法の核心である。有限個の基底関数が張る空間 V_N に解を「射影」すると、それが（適切なノルムで）V_N の中で最良の近似になる。A 型近似（射影）の名前はここから来ている。

2.6 弱解とソボレフ空間

★★★ 最重要 弱形式は Galerkin 近似（第 4 章）の出発点であり、ソボレフ空間は「運動エネルギー有限な状態」の空間である

2.6.1 弱微分

Poisson 方程式 $-\Delta u = f$ を、両辺に滑らかで境界の近くで 0 になる関数 φ を掛けて積分し、部分積分すると $\int \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int f\varphi$ となる。この式には u の 1 階微分しか現れない。そこで「微分」の意味を、部分積分の公式が成り立つことによって定義し直す。

以下、$C_c^\infty(\Omega)$ で、無限回微分可能で台（$\varphi \neq 0$ となる点の集合の閉包）が Ω の内部のコンパクト集合に含まれる関数全体を表し、その元を**試験関数**と呼ぶ。

定義 2.14 (弱微分)**.** $u, g \in L^2(\Omega)$ とする。すべての試験関数 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ に対し

$$\int_\Omega u\, \partial_i \varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g\, \varphi \,\mathrm{d}x$$

が成り立つとき、g を u の（x_i についての）**弱微分**といい、$\partial_i u = g$ と書く。

u が普通の意味で C^1 なら、部分積分（試験関数は境界の近くで 0 なので境界項は出ない）により普通の微分が弱微分になる。弱微分は存在すれば（測度ゼロの集合を除いて）一意である。「弱い」とは、各点での極限としての微分を要求せず、試験関数との積分という平均的な情報だけで微分を決めているという意味である。

例（弱微分をもつ関数ともたない関数） $(-1, 1)$ 上の $u(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分できないが、弱微分 $\operatorname{sign} x$ をもつ（$\int_{-1}^{1} |x| \varphi' = -\int_{-1}^{1} \operatorname{sign}(x)\varphi$ は $(-1, 0)$ と $(0, 1)$ に分けて部分積分すれば確かめられる）。一方、階段関数 $H(x)$（$x > 0$ で 1、$x < 0$ で 0）は $\int H\varphi' = -\varphi(0)$ となる。これを $-\int g\varphi$ と書ける $g \in L^2$ は無い。実際、$\varphi(0) = 1$ で台が $(-\eta, \eta)$ に入り $|\varphi| \le 1$ の試験関数をとると、Cauchy–Schwarz より $|\int g\varphi| \le \|g\|_{L^2(-\eta,\eta)} \sqrt{2\eta} \to 0$（$\eta \to 0$）となって $\varphi(0) = 1$ と矛盾する。H の微分はデルタ関数で、関数ではない。折れ曲がりは許されるが、跳びは許されない。

2.6.2 ソボレフ空間

定義 2.15 (ソボレフ空間 H^1)**.** $H^1(\Omega)$ は、$u \in L^2(\Omega)$ で、すべての 1 階の弱微分 $\partial_i u$ が存在して $L^2(\Omega)$ に属するもの全体である。内積とノルムを

$$\langle u,\, v\rangle_{H^1} = \int_\Omega \bigl(\bar{u}v + \overline{\nabla u}\cdot\nabla v\bigr)\mathrm{d}x, \qquad \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2$$

で定める。$C_c^\infty(\Omega)$ の H^1 ノルムでの閉包（試験関数の列の極限として得られる関数全体）を $H_0^1(\Omega)$ と書く。

$H^1(\Omega)$ と $H_0^1(\Omega)$ はヒルベルト空間である（L^2 の完備性と、弱微分の定義式が極限で保たれることから従う）。名前は Sobolev による。H_0^1 は「境界で 0 になる H^1 の関数」を正確に述べたもので、Dirichlet 境界条件をここに組み込む。

H^1 は運動エネルギーが有限な状態の空間

量子力学では $\langle\psi, -\Delta\psi\rangle = \|\nabla\psi\|^2$（$\hbar^2/2m$ を除く）が運動エネルギーの期待値である。H^1 は「確率が規格化でき、運動エネルギーも有限な波動関数」の空間で、変分法で基底状態を探すときの自然な舞台になる。水素原子の基底状態 e^{-r} は原点で尖って（カスプ）いて 2 回微分できないが、H^1 には属する。H^1 という言葉は「2 回微分できなくても、エネルギーが有限なら物理的に許される状態」を表している。第 4 章で見るように、Gauss 関数の基底でこのカスプを表せないことが量子化学計算の収束を遅くする。

H^1 の関数がどれだけ滑らかかは次元に依存する。1 次元では H^1 の関数は連続である。実際、$u(x) - u(y) = \int_y^x u'$ に Cauchy–Schwarz を使うと

$$|u(x) - u(y)| \le |x-y|^{1/2}\|u'\|$$

となり、u は（指数 1/2 の）Hölder 連続である（正確には、測度ゼロの集合で値を修正すると連続な代表がとれる）。したがって 1 次元では境界値 $u(0)$ が意味をもつ。一方 2 次元では、原点の近くで $u(x) = \log|\log|x||$ とした関数が H^1 に属するのに有界でない（$\int|\nabla u|^2 \propto \int_0^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{r\log^2 r} < \infty$）。「エネルギーが有限なら滑らか」という直観は、高次元では成り立たない。

2.6.3 Poincaré 不等式

定理 2.16 (Poincaré 不等式 ★★★ 最重要)**.** Ω が幅 L の帯 $\{0 < x_1 < L\}$ に含まれる有界領域なら、すべての $u \in H_0^1(\Omega)$ に対し

$$\|u\| \le \frac{L}{\pi}\|\nabla u\|.$$

特に $\Omega = (0, L)$（*1* 次元）では定数 L/π は最良で、等号は $u = \sin(\pi x/L)$ で成り立つ。

証明. 両辺は H^1 ノルムについて連続なので、$u \in C_c^\infty(\Omega)$ について示せば極限で H_0^1 全体に及ぶ。まず 1 次元 $(0, L)$ で、u を正弦級数 $u = \sum_{k} a_k \sin(k\pi x/L)$ に展開する。$u(0) = u(L) = 0$ だから部分積分で $\int_0^L u'\cos(k\pi x/L)\mathrm{d}x = \frac{k\pi}{L}\int_0^L u\sin(k\pi x/L)\mathrm{d}x$ となり、u' の余弦展開の係数は $(k\pi/L)a_k$ である（定数項は $\int u' = 0$）。Parseval の等式から

$$\|u'\|^2 = \frac{L}{2}\sum_k \Bigl(\frac{k\pi}{L}\Bigr)^2 a_k^2 \ge \Bigl(\frac{\pi}{L}\Bigr)^2 \frac{L}{2}\sum_k a_k^2 = \Bigl(\frac{\pi}{L}\Bigr)^2\|u\|^2,$$

等号は $a_k = 0$（$k \ge 2$）のときである。多次元では、x_1 以外の座標 x' を固定するごとに $x_1 \mapsto u(x_1, x')$ に 1 次元の結果を使い（帯の幅は L なので、x_1 方向の区間の長さは L 以下で、短い区間では定数がさらに良い）、x' で積分すれば $\|u\|^2 \le (L/\pi)^2\|\partial_1 u\|^2 \le (L/\pi)^2\|\nabla u\|^2$。 □

境界条件 $u=0$ が本質的である。定数関数は $\nabla u=0$ だが $\|u\|\neq 0$ で、境界で 0 という条件がこれを排除している。物理的には「箱に閉じ込めた粒子の運動エネルギーは $(\pi\hbar/L)^2/2m$ 以上」という零点エネルギーの主張そのものである。$(0,2.7)$ で多項式の試験関数 200 個を無作為に作り、すべて Rayleigh 商 $\|u'\|^2/\|u\|^2$ が $(\pi/L)^2$ 以上であることも確かめた（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。

2.6.4 Poisson 方程式の弱形式と Riesz の表現定理

定義 2.17 (弱解)**.** $f\in L^2(\Omega)$ とする。$u\in H^1_0(\Omega)$ が Dirichlet 問題 $-\nabla\cdot(A\nabla u)=f$（$\Omega$ 内）、$u=0$（$\partial\Omega$ 上）の**弱解**であるとは、

$$a(u,v):=\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x=:\ell(v)\qquad\text{すべての } v\in H^1_0(\Omega) \tag{2.6}$$

が成り立つことをいう。ここで $A(x)$ は実対称行列値の関数で、定数 $0<\lambda\le\Lambda$ があって $\lambda|\xi|^2\le\xi\cdot A(x)\xi\le\Lambda|\xi|^2$（**有界かつ一様楕円**）を満たすとする。$A=I$ なら $-\Delta u=f$ である。

滑らかな古典解は、部分積分により弱解である。逆に弱解が滑らかなら、部分積分を逆にたどって $\int(-\nabla\cdot(A\nabla u)-f)v=0$ がすべての v で成り立ち、古典解になる。弱解は古典解の自然な一般化で、係数 A が不連続（異なる物質の境界がある）な場合にも意味をもつ。第 9 章の均質化はまさにそのような係数を扱う。

弱解の存在を示す道具が次の定理である。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線形な関数 $\ell:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ が**有界**（連続）であるとは、ある C で $|\ell(v)|\le C\|v\|$ となることをいう。

定理 2.18 (Riesz の表現定理 ★★★ 最重要)**.** 実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形汎関数 ℓ に対し、$\ell(v)=\langle z,v\rangle$（すべての $v\in\mathcal{H}$）を満たす $z\in\mathcal{H}$ がただ一つ存在する。

証明. $\ell=0$ なら $z=0$ である。$\ell\neq 0$ とし、$N=\{v:\ell(v)=0\}$ とおく。ℓ の連続性から N は閉部分空間で、$N\neq\mathcal{H}$ である。$x\notin N$ をとり、射影定理（定理 2.13）で x の N への最短点 v^* をとれば、$z_0=x-v^*\neq 0$ は N と直交する。任意の v について $v-\frac{\ell(v)}{\ell(z_0)}z_0\in N$ なので、z_0 との内積が 0 となり、$\langle z_0,v\rangle=\frac{\ell(v)}{\ell(z_0)}\|z_0\|^2$。したがって $z=\frac{\ell(z_0)}{\|z_0\|^2}z_0$ とおけば $\ell(v)=\langle z,v\rangle$ である。一意性：$\langle z-z',v\rangle=0$ が全 v で成り立てば $v=z-z'$ として $z=z'$。 □

定理 2.19 (弱解の存在・一意性・連続依存 ★★★ 最重要)**.** 定義 *2.17* の仮定の下で、任意の $f\in L^2(\Omega)$ に対し弱解 $u\in H^1_0(\Omega)$ がただ一つ存在し、*Poincaré* 定数を C_P として $\|\nabla u\|\le(C_P/\lambda)\|f\|$ を満たす。

証明. $a(u,v)$ は $H^1_0(\Omega)$ 上の対称な双線形形式で、一様楕円性から $a(u,u)\ge\lambda\|\nabla u\|^2$、有界性から $a(u,u)\le\Lambda\|\nabla u\|^2$ である。Poincaré 不等式から $\|u\|_{H^1}^2\le(1+C_P^2)\|\nabla u\|^2$ なので、$a(u,u)^{1/2}$ は H^1 ノルムと同等なノルムである。同等なノルムでコーシー列・収束の概念は変わらないので、H^1_0 は内積 a についてもヒルベルト空間である。$\ell(v)=\int fv$ は $|\ell(v)|\le\|f\|\|v\|\le C_P\|f\|\|\nabla v\|\le(C_P/\sqrt{\lambda})\|f\|\,a(v,v)^{1/2}$ を満たして有界である。Riesz の表現定理を内積 a について使えば、$a(u,v)=\ell(v)$ を満たす u がただ一つ存在する。$v=u$ とおくと $\lambda\|\nabla u\|^2\le a(u,u)=\ell(u)\le C_P\|f\|\|\nabla u\|$ から評価が出る。 □

この定理は、Hadamard の 3 条件（存在・一意性・連続依存）を、H^1_0 のノルムで測るという意味で一度に示している。A が対称でない場合も、一様楕円性に当たる条件 $a(u,u)\ge\lambda\|\nabla u\|^2$ があれば同じ結論が成り立つ（Lax–Milgram の定理。証明は Riesz の表現定理と縮小写像の組み合わせで行える）。

弱解が実際に滑らかか（f が滑らかなら u も滑らかか）は**正則性理論**の問題で、Riesz の定理からは出てこない難所である。滑らかな係数と境界に対しては正則性が成り立つことが知られている。第 4 章で見るように、Galerkin 近似の収束の速さは解の正則性で決まるので、この難所は「近似がどれだけ速く収束するか」に直結する。

弱形式は Galerkin 近似の出発点

弱形式 (2.6) の「すべての $v \in H_0^1$ について」を「有限次元の部分空間 V_N のすべての v について」に置き換え、$u_N \in V_N$ を $a(u_N, v) = \ell(v)$（$v \in V_N$）で決めるのが **Galerkin 近似**である。差をとれば $a(u - u_N, v) = 0$（$v \in V_N$）となり、u_N は内積 a に関する u の V_N への直交射影、すなわち射影定理の最短点である。したがって u_N は V_N の中で（エネルギーノルムで）最良の近似になる。量子化学の LCAO・CI はこれを固有値問題で行ったものである。詳しくは第 4 章で扱う。

例題 2.6　1 次元の弱解を Riesz の表現定理で構成する ★★★ 最重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

$\Omega = (0,1)$、$\mathcal{H} = H_0^1(0,1)$ に内積 $\langle u, v\rangle_a = \int_0^1 u'v'\,\mathrm{d}x$ を入れる。$f(x) = x$ に対し $-u'' = f$、$u(0) = u(1) = 0$ を考える。

1. 点 $x \in (0,1)$ を固定し、$G_x(y) = \min(x,y)\bigl(1 - \max(x,y)\bigr)$ とする。すべての $v \in \mathcal{H}$ に対し $\langle G_x, v\rangle_a = v(x)$ を示せ（G_x は点での値をとる汎関数の Riesz の表現である）。
2. 弱解 u について $u(x) = \int_0^1 G_x(y) f(y)\,\mathrm{d}y$ を示し、u を具体的に求めよ。
3. 求めた u が古典解であることと、試験関数 $v = x^2(1-x)$ に対して弱形式が成り立つことを確かめよ。

解答. **(1)** $G_x(y)$ は $y < x$ で $y(1-x)$、$y > x$ で $x(1-y)$ で、連続な折れ線である。$G_x'(y)$ は $y < x$ で $1-x$、$y > x$ で $-x$ なので、$v(0) = v(1) = 0$ を使って

$$\langle G_x, v\rangle_a = (1-x)\int_0^x v'\,\mathrm{d}y - x\int_x^1 v'\,\mathrm{d}y = (1-x)v(x) + x\,v(x) = v(x).$$

1 次元の H_0^1 の関数は連続なので（前小節の Hölder 評価）$v(x)$ は意味をもち、$|v(x)| \le \|v'\|$ からこの汎関数は有界である。Riesz の定理が保証する表現元が G_x である。
(2) 弱解の定義 $\langle u, v\rangle_a = \int fv$ で $v = G_x$ とおくと、(1) の対称性 $\langle u, G_x\rangle_a = u(x)$ と合わせて $u(x) = \int_0^1 G_x(y) f(y)\,\mathrm{d}y$ を得る。G_x は Green 関数にほかならない。$f(y) = y$ で計算すると

$$u(x) = (1-x)\int_0^x y^2\,\mathrm{d}y + x\int_x^1 (1-y)y\,\mathrm{d}y = \frac{(1-x)x^3}{3} + x\Bigl(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Bigr) = \frac{x - x^3}{6}.$$

(3) $u'' = -x$ より $-u'' = x = f$、$u(0) = u(1) = 0$ で古典解である。弱形式は $\int_0^1 u'v'\,\mathrm{d}x$ と $\int_0^1 xv\,\mathrm{d}x$ がともに $1/20$ で一致する（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。この例では弱解が古典解と一致し、正則性の問題は生じない。

2.7　コンパクト性と弱収束

★★★ 最重要　近似列から極限を取り出す手段。収束の失敗の 2 つの型（逃げる・振動する）が第 5・6・9 章の主役になる

2.7.1　有界列から収束部分列は取れるか

有限次元では、有界な点列は必ず収束する部分列をもつ（Bolzano–Weierstrass の定理）。変分法や近似の理論では「近似列は有界である」まではアプリオリ評価で言えることが多いので、そこから極限を取り出せるかが分かれ目になる。ところが無限次元ではこれが成り立たない。

例（正規直交系は収束しない）　ヒルベルト空間の正規直交系 (e_n)（$\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{nm}$）は $\|e_n\| = 1$ で有界だが、$n \neq m$ なら $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ である。互いの距離が常に $\sqrt{2}$ なので、どの部分列もコーシー列にならず、ノルムの意味で収束する部分列は無い。$L^2(0,\pi)$ では $e_n = \sqrt{2/\pi}\sin(nx)$ がその例である。

この困難を回避するため、収束の意味を弱める。

定義 2.20 (弱収束)**.** ヒルベルト空間の列 (u_n) が u に**弱収束**するとは、すべての $v \in \mathcal{H}$ に対し $\langle v, u_n\rangle \to \langle v, u\rangle$ となることをいい、$u_n \rightharpoonup u$ と書く。これに対し $\|u_n - u\| \to 0$ を**強収束**（ノルム収束）という。

弱収束は「固定した測定器で見た収束」

$\langle v, u_n\rangle$ は、状態 u_n を固定した「測定器」v で測った値と読める。弱収束は、どの測定器で測っても値が収束することを要求するが、測定器を n に合わせて取り替えることは許さない。u_n が細かく振動したり遠くへ逃げたりすると、固定した測定器には何も映らなくなり、u_n 自体は大きさを保っていても弱極限は 0 になる。弱収束は「平均として見た収束」である。

弱収束の基本的な性質を三つ挙げる。いずれも短く示せる。

1. **強収束なら弱収束**：$|\langle v, u_n - u\rangle| \le \|v\|\|u_n - u\|$。
2. **ノルムは弱極限で下がりうるが上がらない**（弱下半連続性）：$u_n \rightharpoonup u$ なら $\|u\| \le \liminf \|u_n\|$。実際 $\|u\|^2 = \lim\langle u, u_n\rangle \le \|u\| \liminf\|u_n\|$。
3. **弱収束＋ノルムの収束なら強収束**：$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle u, u_n\rangle + \|u\|^2 \to \|u\|^2 - 2\|u\|^2 + \|u\|^2 = 0$。

性質 2 と 3 から、弱収束で失われるものはちょうどノルムの減少分 $\liminf\|u_n\|^2 - \|u\|^2$ であり、それが 0 なら何も失われていないことがわかる。

例題 2.7　正弦関数の弱収束と、2 乗の弱極限 ★★★ 最重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

$L^2(0,\pi)$ で $e_n = \sqrt{2/\pi}\sin(nx)$ とする。

1. Bessel の不等式 $\sum_n |\langle v, e_n\rangle|^2 \le \|v\|^2$ を使い、$e_n \rightharpoonup 0$ を示せ。
2. $\varphi(x) = x(\pi - x)$ に対し $\int_0^\pi \varphi \sin(nx)\,\mathrm{d}x$ を求め、$n \to \infty$ での減り方を述べよ。
3. $\sin^2(nx) \rightharpoonup \frac{1}{2}$ を示せ。これから「弱極限をとる操作と 2 乗する操作は交換しない」ことを読み取れ。

解答. **(1)** 有限個の $e_1, \dots, e_N$ への射影を考えると $\|v\|^2 \ge \sum_{n\le N}|\langle v, e_n\rangle|^2$（射影定理）で、$N \to \infty$ として Bessel の不等式が出る。左辺の級数が収束するので一般項は 0 に近づき、$\langle v, e_n\rangle \to 0$ がすべての v で成り立つ。一方 $\|e_n\| = 1$ なので強収束はしない。ノルム 1 がまるごと弱極限で失われている（性質 2 で不等号が真に成り立つ例）。
(2) 2 回部分積分すると、n が奇数なら $4/n^3$、偶数なら 0 である（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。φ が滑らかで境界で 0 なので、内積は n^{-3} と速く減る。φ の滑らかさが低いほど減りは遅くなるが、$\varphi \in L^2$ でありさえすれば (1) により必ず 0 に近づく。図 2.2 は $\varphi(x)\sin(nx)$ の正負の部分が n を大きくすると打ち消し合う様子である。
(3) $\sin^2(nx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2nx)$ で、$\sqrt{2/\pi}\cos(2nx)$ も正規直交系なので (1) と同じ理由で $\cos(2nx) \rightharpoonup 0$。よって $\sin^2(nx) \rightharpoonup \frac{1}{2}$。たとえば $\int_0^\pi \varphi\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x$ は $n = 5, 20, 80$ で $2.615,\ 2.586,\ 2.584$ と、$\frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi = \pi^3/12 \approx 2.5839$ に近づく（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。

$\sin(nx) \rightharpoonup 0$ だから「弱極限の 2 乗」は 0 だが、「2 乗の弱極限」は $\frac{1}{2}$ である。非線形な量の弱極限は、弱極限の非線形な量と一致しない。

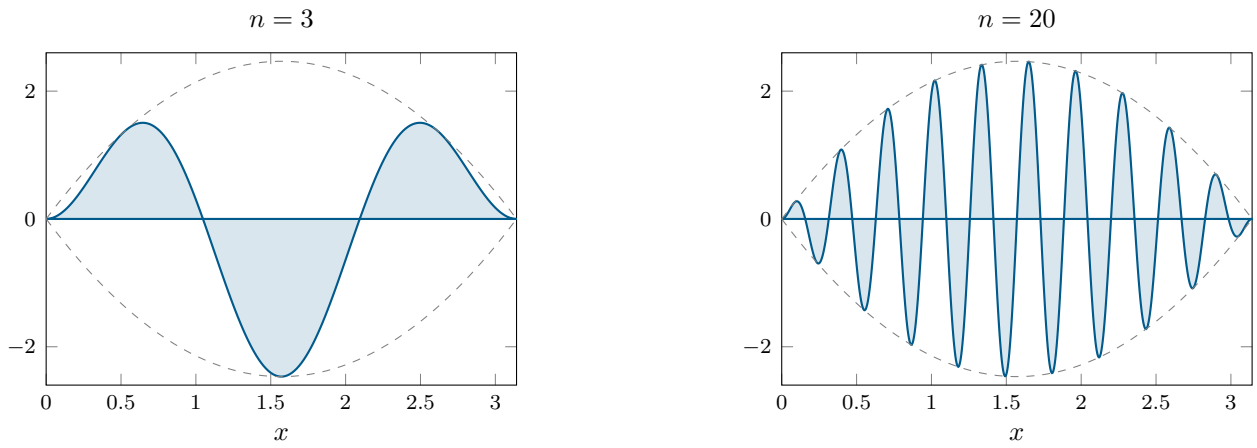


図 2.2　$\varphi(x)\sin(nx)$（$\varphi = x(\pi - x)$、破線は $\pm\varphi$）。n が大きいと正負の面積が打ち消し合い、積分 $\langle \varphi, \sin(nx)\rangle$ は 0 に近づく（$n = 3$ で $4/27$、$n = 20$ で 0）。これが $\sin(nx) \rightharpoonup 0$ の中身である。

2.7.2 弱コンパクト性

弱収束に弱めた代わりに、有限次元の Bolzano–Weierstrass の定理が復活する。

定理 2.21（有界列の弱コンパクト性 ★★★ 最重要）. $\mathcal{H}$ を可算な正規直交基底 (e_k) をもつヒルベルト空間とする（$L^2(\Omega)$、$H^1(\Omega)$ はこの条件を満たす）。$\|u_n\| \le M$ を満たす列は、弱収束する部分列をもち、その極限 u は $\|u\| \le M$ を満たす。

証明. 各 k について数列 $\langle e_k, u_n\rangle$ は M で有界である。$k = 1$ について収束する部分列をとり、その中から $k = 2$ について収束する部分列をとり、と続け、j 番目の部分列の j 番目の項を並べる（対角線論法）。こうして得た部分列（同じ記号 u_n で書く）はすべての k について $c_k = \lim_n \langle e_k, u_n\rangle$ をもつ。任意の K で $\sum_{k\le K}|c_k|^2 = \lim_n \sum_{k\le K}|\langle e_k, u_n\rangle|^2 \le M^2$ なので、$u = \sum_k c_k e_k$ は $\mathcal{H}$ の元で $\|u\| \le M$。任意の v と $\varepsilon > 0$ に対し、v の最初の K 項への射影 v_K を $\|v - v_K\| < \varepsilon$ となるようにとると

$$|\langle v, u_n - u\rangle| \le |\langle v_K, u_n - u\rangle| + \|v - v_K\|\,\|u_n - u\| \le |\langle v_K, u_n - u\rangle| + 2M\varepsilon.$$

第 1 項は有限個の係数の差なので $n \to \infty$ で 0 に近づく。ε は任意なので $\langle v, u_n\rangle \to \langle v, u\rangle$。 □

有界性さえあれば極限の候補は必ず取り出せる。問題は、取り出した弱極限が欲しい性質（ノルム、拘束条件、非線形項の値）を保っているかどうかで、これを決めるのが次の「収束の失敗の型」である。

2.7.3 収束の失敗の型

L^2 で有界なのに強収束しない列には、典型的に次の型がある。どれも弱極限は 0 でノルムは保たれ、ノルムがまるごと失われる。

- **逃げる**（質量が無限遠へ逃げる）：$\mathbb{R}$ 上で $u_n(x) = u(x - n)$。形を保ったまま遠くへ平行移動するので、固定した v との重なりは 0 に近づく。有界領域では起こらない。
- **振動する**：有界区間の上で $u_n(x) = \sin(nx)$。値の大きさは保たれるが、細かく振動して平均が 0 になる。
- **集中する**：$\mathbb{R}$ 上で $u_n(x) = \sqrt{n}\,u(nx)$。一点に鋭く集中する。ノルムは保たれるが、固定した v との内積は 0 に近づく（v が有界なら $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ で減る）。

後の章での役割

逃げる型は第 5 章の主役である。Hartree–Fock 汎関数の最小化列は、電子の一部が無限遠へ逃げる（イオン化する）ことでエネルギーの下限に近づくかもしれず、弱極限では電子数が減ってしまう。これを排除する論法（Lions の集中コンパクト性の原理）が、原子・分子の基底状態の存在証明の核心になる。**振動する**型は第 9 章の主役である。細かく振動する係数をもつ方程式の解は、粗いスケールで見ると弱極限に収束し、非線形項（係数と勾配の積など）の弱極限は弱極限どうしの積と一致しない（例題で見た $\sin^2(nx) \rightharpoonup \frac{1}{2}$）。均質化の有効係数が単純平均にならないこと、乱流で平均流の方程式に Reynolds 応力 $(\overline{u \otimes u} - \bar{u} \otimes \bar{u})$ という未知項が現れて方程式が閉じないことは、どちらもこの交換しなさの表れである。第 6 章の平均場極限では、粒子の経験分布が確率測度として弱い意味で収束することを示すのが目標になる。

2.7.4 Rellich のコンパクト埋め込み

有界領域では「逃げる」型は起きない。さらに勾配のノルムが有界なら、「振動する」「集中する」型も起きない（$\|(\sin nx)'\| \sim n$ は有界でない）。これを正確に述べたのが次の定理である。

定理 2.22 (Rellich ★★★ 最重要)**.** Ω を有界領域とする。$H_0^1(\Omega)$ で有界な列 (u_n)（$\|u_n\|_{H^1} \le M$）は、$L^2(\Omega)$ で強収束する部分列をもつ。（Ω の境界が十分に滑らかなら、H_0^1 を H^1 に替えても成り立つ。）

証明（1 次元 $\Omega = (0,\pi)$ の場合）. 定理 2.21 により、H_0^1 で弱収束する部分列 $u_n \rightharpoonup u$ がとれる。H_0^1 の内積との関係から、正弦係数 $a_k^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int u_n \sin(kx)$ は各 k で u の係数 a_k に収束する（$\sin(kx)$ との L^2 内積は H_0^1 上の有界線形汎関数で、Riesz の定理によりある元との H^1 内積で書けるから）。$w_n = u_n - u$ は $\|w_n'\| \le 2M$ を満たし、定理 2.16 の証明と同じ Parseval の計算から

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k>N}\bigl(a_k^{(n)} - a_k\bigr)^2 \le \frac{1}{(N+1)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\sum_{k} k^2\bigl(a_k^{(n)} - a_k\bigr)^2 = \frac{\|w_n'\|^2}{(N+1)^2} \le \frac{4M^2}{(N+1)^2}.$$

したがって $\|w_n\|^2 \le \frac{\pi}{2}\sum_{k\le N}(a_k^{(n)} - a_k)^2 + 4M^2/(N+1)^2$。右辺第 1 項は有限和で $n\to\infty$ で 0 になるので、$\limsup_n \|w_n\|^2 \le 4M^2/(N+1)^2$。$N$ は任意なので $\|u_n - u\| \to 0$。 □

証明の要点は、勾配の有界性が「高い波数の成分（尾部）は一様に小さい」ことを保証し、問題が有限次元（低い波数の成分）に帰着することである。尾部評価そのものも数値で確かめた（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。一般の次元・領域でも、同じ「高周波の尾部の一様な小ささ＋有限次元への帰着」が証明の骨格で、難所は有界領域で固有関数展開に代わる道具を用意するところにある。$\Omega = \mathbb{R}^d$ では「逃げる」型の例 $u(x-n)$ が H^1 で有界なまま L^2 で強収束しないので、定理は成り立たない。

2.8 変分法の直接法

★★★ 最重要「基底状態は存在するか」を問う量子力学の論法そのもの。最小化列→有界性→弱極限→下半連続性

2.8.1 Dirichlet の原理と Weierstrass の反例

Poisson 方程式の解を、汎関数 $J(u) = \frac{1}{2}\int|\nabla u|^2 - \int fu$ を最小にする関数として見つけるという考え（Dirichlet の原理）は、Riemann が複素関数論で使った。これに対し Weierstrass は、下に有界な汎関数が最小値をとるとは限らないことを指摘した。

例（Weierstrass の例） $J(u) = \int_{-1}^{1} x^2 u'(x)^2\,\mathrm{d}x$ を、$u(-1) = -1$、$u(1) = 1$ を満たす滑らかな関数の中で最小化する。$J \ge 0$ だが、$u_\varepsilon(x) = \arctan(x/\varepsilon)/\arctan(1/\varepsilon)$ とすると $J(u_\varepsilon) \approx 2\varepsilon/\pi \to 0$ となり（$\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ で $0.0634,\ 0.00637,\ 0.00064$。検算 `scripts/verify_ch02.py`）、下限は 0 である。しかし $J(u) = 0$ なら $u' = 0$、つまり u は定数で、境界条件 $u(\pm1) = \pm1$ と両立しない。下限は達成されない。最小化列 u_ε は階段関数に近づき、許された関数のクラスから出ていく。

最小化列が「許された関数のクラス」から出ていくのを止めるのがコンパクト性で、極限で汎関数の値が跳ね上がらないことを保証するのが下半連続性である。Dirichlet の原理は、Hilbert らによって後にこの二つを整えることで正当化された。

2.8.2 直接法の一般形

定理 2.23（変分法の直接法 ★★★ 最重要）. $\mathcal{H}$ を定理 2.21 の条件を満たすヒルベルト空間、$J:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ とし、次を仮定する。

1. **強圧性**：$\|u\|\to\infty$ なら $J(u)\to\infty$。
2. **弱下半連続性**：$u_n \rightharpoonup u$ なら $J(u)\le \liminf_{n} J(u_n)$。

このとき J は $\mathcal{H}$ 上で最小値をとる。

証明. $m=\inf J$（$-\infty$ の可能性もまだ排除しない）とし、$J(u_n)\to m$ となる**最小化列**をとる。強圧性から (u_n) は有界である（有界でなければ部分列で $J(u_n)\to\infty$ となり m に近づかない）。定理 2.21 で弱収束部分列 $u_n\rightharpoonup u^*$ をとると、弱下半連続性から $J(u^*)\le\liminf J(u_n)=m$。$J(u^*)$ は実数なので $m>-\infty$ で、$m\le J(u^*)$ と合わせて $J(u^*)=m$。 □

論法の 4 段（下に有界な汎関数の最小化列 → アプリオリ評価による有界性 → 弱コンパクト性による弱収束部分列 → 弱下半連続性による最小性）は、この巻で繰り返し現れる。弱収束を使う理由は、有界性からは弱収束しか取り出せないからである。その代償として、汎関数が弱極限で下がりはしても上がらないこと（下半連続性）を別に示す必要がある。

2.8.3 Dirichlet 積分への適用

$\mathcal{H}=H^1_0(\Omega)$ に内積 $\langle u,v\rangle_a=\int\nabla u\cdot\nabla v$ を入れ（Poincaré 不等式によりヒルベルト空間）、$J(u)=\frac12\|u\|_a^2-\ell(u)$、$\ell(u)=\int fu$ とする。

強圧性：$|\ell(u)|\le C_P\|f\|\|u\|_a$ より $J(u)\ge\frac12\|u\|_a^2-C_P\|f\|\|u\|_a\to\infty$。**弱下半連続性**：$\ell$ は有界線形汎関数なので、Riesz の定理で $\ell(u)=\langle g,u\rangle_a$ と書け、弱収束で $\ell(u_n)\to\ell(u)$。ノルムの部分は弱下半連続（前節の性質 2）。よって直接法により最小元 u^* が存在する。

一意性と弱形式：任意の v と実数 s について $J(u^*+sv)\ge J(u^*)$ で、$J(u^*+sv)=J(u^*)+s\big(\langle u^*,v\rangle_a-\ell(v)\big)+\frac{s^2}{2}\|v\|_a^2$ だから、$s=0$ で最小になるには $\langle u^*,v\rangle_a=\ell(v)$ が必要である。これは弱形式 (2.6)（$A=I$）そのもので、最小元は弱解である。さらに弱解 u と任意の v について

$$J(v)-J(u)=\frac12\|v-u\|_a^2 \tag{2.7}$$

が成り立つ（上の展開で $u^*=u$、$sv\to v-u$ とし、弱形式で 1 次の項を消す）。したがって最小元はただ一つである。

変分法と弱形式は同じものの二つの顔

係数が対称なとき、「J を最小にする」ことと「弱形式を満たす」ことは同値で、どちらも Riesz の表現定理と同じ内容を述べている。(2.7) は第 4 章で中心的な役割を果たす。近似解 v のエネルギーの誤差 $J(v)-J(u)$ は、解の誤差のエネルギーノルムの **2 乗**に等しい。変分法でエネルギーが解よりずっと精度よく求まるのはこのためである。

例題 2.8　Dirichlet 積分の最小化と 1 項の試行関数 ★★★ 最重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

$\Omega=(0,1)$、$f=1$ とし、$J(u)=\frac12\int_0^1 u'^2\,\mathrm{d}x-\int_0^1 u\,\mathrm{d}x$ を $H^1_0(0,1)$ で最小化する。

1. 最小元 u と最小値 $J(u)$ を求めよ。

2. 試行関数 $v = a\sin(\pi x)$ に制限して J を最小化し、最適な a と $J(v)$ を求めよ。

3. $J(v) > J(u)$ を確かめ、その差が (2.7) の $\frac{1}{2}\|(v-u)'\|^2$ に一致することを確かめよ。

解答. **(1)** 最小元は弱解、すなわち $-u'' = 1$、$u(0) = u(1) = 0$ の解 $u = x(1-x)/2$ である。弱形式で $v = u$ とおくと $\int u'^2 = \int u$ なので $J(u) = -\frac{1}{2}\int_0^1 u\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} = -\frac{1}{24}$。
(2) $\int_0^1 (a\pi\cos\pi x)^2\mathrm{d}x = a^2\pi^2/2$、$\int_0^1 a\sin\pi x\,\mathrm{d}x = 2a/\pi$ より $J = \frac{\pi^2}{4}a^2 - \frac{2}{\pi}a$。$a$ で微分して 0 とおくと $a = 4/\pi^3$、$J(v) = -4/\pi^4 \approx -0.041064$。
(3) $-1/24 \approx -0.041667$ なので $J(v) > J(u)$ で、試行関数のエネルギーは真の最小値の上界になっている。差は $1/24 - 4/\pi^4 \approx 6.0\times10^{-4}$ で、$\frac{1}{2}\int_0^1 (v'-u')^2\mathrm{d}x$ を直接計算した値と一致する（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。最小値に対する相対誤差は 1.4% だが、関数 v 自体の誤差 $\|(v-u)'\|/\|u'\|$ は約 12% で、エネルギーのほうがずっと正確である。これは (2.7) の「2 乗」の現れである。

2.8.4 基底状態の存在：量子力学の論法

有界領域 Ω に閉じ込められた粒子のハミルトニアン $-\Delta + V$（V は有界）の基底状態エネルギーは

$$E_0 = \inf\Big\{\int_\Omega \big(|\nabla u|^2 + V|u|^2\big)\mathrm{d}x \;:\; u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\| = 1\Big\}$$

である。最小元（基底状態）が存在することを、直接法で示せる。最小化列 (u_n) をとると、$\int|\nabla u_n|^2 \le E_0 + 1 + \sup|V|$ から H_0^1 で有界で、弱収束部分列 $u_n \rightharpoonup u$ がとれる。ここで新しい問題が生じる。拘束条件 $\|u\| = 1$ は弱極限で保たれるとは限らない（弱極限ではノルムが下がりうる）。これを救うのが Rellich の定理で、有界領域では $u_n \to u$ が L^2 で強収束するので、$\|u\| = 1$ が保たれ、$\int V|u_n|^2 \to \int V|u|^2$ も成り立つ。勾配の項は弱下半連続なので、u が最小元である。

$\Omega = \mathbb{R}^3$（原子・分子）では Rellich の定理が使えず、最小化列の「逃げる」型を自分で排除しなければならない。水素原子のように $V \to 0$（無限遠）の場合、無限遠へ逃げた波動関数のエネルギーは 0 に近づくので、$E_0 < 0$（束縛状態のエネルギーが「電子を無限遠に置いた状態」より低い）であれば逃げる型は損になり、排除できる。この「逃げるとエネルギーが上がる」という比較が第 3 章の本質的スペクトルの下端との比較であり、第 5 章で Hartree–Fock 汎関数に対して行う議論の原型である。物理屋が「束縛エネルギーが負だから束縛状態がある」と考えるとき、その直観は正確にこの論法に対応している。

2.9 この章のまとめ

★★★ 最重要 4 つの道具と、それを使う章の対応表

道具	中身（この章の該当箇所）	主に使う章
誤差評価（Grönwall 型）	残差と安定性から真の解と近似解の距離を抑える（定理 2.6、エネルギー法）	第 6 章（平均場極限）、第 7 章（断熱・特異摂動）、第 8 章
適切性	存在・一意性・連続依存（定理 2.4、2.19）、アプリオリ評価による大域存在（定理 2.9）	第 3 章（自己共役性と時間発展）、第 8 章（流体方程式）
弱形式と射影	弱解・Riesz の表現定理・射影定理（定理 2.13、2.18）、エネルギー誤差の恒等式 (2.7)	第 4 章（Galerkin・Rayleigh–Ritz）
コンパクト性	有界列の弱コンパクト性、Rellich の定理（定理 2.21、2.22）、直接法（定理 2.23）	第 3 章、第 5 章（Hartree–Fock の最小元）、第 6 章
弱収束	平均としての収束、逃げる・振動する・集中する型、非線形項と弱極限の非可換性	第 5 章、第 6 章（経験分布）、第 9 章（均質化・乱流の閉じ）

表 2.1　第 2 章の道具と、それを使う章

この章の要点

1. 「解けない」には「閉じた式で書けない」と「解が無い」の二つがあり、近似の正当化に必要なのは後者の否定、すなわち Hadamard の適切性（存在・一意性・連続依存）である。
2. ODE の解は縮小写像の不動点として作られ（Picard–Lindelöf）、Lipschitz 性が破れると非一意性や有限時間爆発が起こる。
3. Grönwall の不等式は「真の解と近似解の距離 $\leq$（データの差＋残差）$\times$ 増幅率」という誤差評価の原型を与え、系の構造を使うと増幅率を大きく下げられる。
4. 保存量・減少するエネルギーによるアプリオリ評価があれば、局所解は大域解に延びる。
5. 偏微分方程式では関数をノルムで測り、完備な空間（ヒルベルト空間 L^2、H^1）に置く。完備性は近似列の極限が空間に残ることを保証する。
6. 弱形式に書き直すと、Riesz の表現定理で弱解の存在・一意性・連続依存が一度に出る。弱形式は Galerkin 近似の出発点である。
7. 無限次元では有界列から強収束部分列は取れないが、弱収束部分列は取れる。弱収束の失敗には「逃げる」「振動する」「集中する」型があり、有界領域で勾配が有界なら Rellich の定理が強収束を回復する。
8. 変分法の直接法（最小化列→有界性→弱極限→下半連続性）は、基底状態の存在を問う論法そのものである。

第 1 章の 3 型の分類に照らすと、この章で用意したものは次のように働く。A 型（射影）の近似については、射影定理と弱形式が「Galerkin 近似は有限次元部分空間への直交射影であり、その中で最良である」ことを示し、エネルギー誤差の恒等式 (2.7) と直接法が変分原理による上界と最小元の存在を正当化した。具体的な収束の速さは第 4 章で正則性と結びつける。B 型（極限）の近似については、Grönwall 型の誤差評価が「極限方程式の解と元の方程式の解の距離」を測る標準的な手段であり、コンパクト性と弱収束が「極限が存在するか、どの意味で収束するか」を論じる言葉を与えた。特に、弱極限と非線形項が交換しないことは、極限方程式に新しい項（有効係数）が現れる理由であり、それを閉じた形で書けない場合が C 型（閉じる）の近似の出発点になる。乱流の Reynolds 応力がその典型で、これを弱極限の言葉で述べられるところまでは数学が案内するが、その未知項をどう置き換えるかについては、ここで用意した道具は保証を与えない。

例題 2.9　ロジスティック方程式で適切性の 3 条件を確かめる ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

初期値問題 $y' = y(1-y)$、$y(0) = y_0 \in [0,1]$ を考える。

1. $F(y) = y(1-y)$ は $\mathbb{R}$ 全体では Lipschitz でないが、解が局所的にただ一つ存在することを示せ。
2. 解が存在する限り $0 \leq y(t) \leq 1$ であることを示し、解が全時刻で存在することを結論せよ。
3. 初期値 $y_0 = 0.5$ と $z_0 = 0.51$ の二つの解について、Grönwall 型の評価で時刻 $t = 3$ の差を上から抑え、厳密解から求めた実際の差と比べよ。評価が粗くなる理由も述べよ。

解答. **(1)** $|F(y) - F(z)| = |y - z|\,|1 - y - z|$ なので、$|y|, |z| \leq R$ の範囲では Lipschitz 定数 $1 + 2R$ がとれる。$\mathbb{R}$ 全体では $|1 - y - z|$ に上限が無いので大域的な Lipschitz 定数は無いが、定理 2.4 は初期値のまわりの有界な長方形 R での Lipschitz 性しか使わないので、局所解はただ一つ存在する。
(2) $y \equiv 0$ と $y \equiv 1$ はどちらも解である。$y_0 \in (0,1)$ の解がある時刻 t_1 で 1 に達したとすると、

時刻 t_1 を初期時刻とみれば、その解と $y \equiv 1$ は同じ初期値をもつ二つの解になり、一意性から一致する。すると $y_0 = 1$ となって矛盾する。0 についても同じなので、解は区間 $[0,1]$ から出られない（$y_0 = 0, 1$ なら解は定数）。これは解を求めずに得たアプリオリ評価 $|y(t)| \le 1$ であり、F は各有界集合上で Lipschitz なので、定理 2.9 により解は全時刻で存在する。

(3) 二つの解はどちらも $[0,1]$ に留まり、そこでは $|1 - y - z| \le 1$ なので、解の通る範囲に限れば Lipschitz 定数は $L = 1$ である。定理 2.6 の証明は解の通る範囲での Lipschitz 性しか使わないので、$\delta = 0$ として

$$|y(3) - z(3)| \le |y_0 - z_0|\,\mathrm{e}^{3} = 0.01\,\mathrm{e}^{3} \approx 0.201$$

を得る。一方、変数分離で解くと $y(t) = 1/\bigl(1 + (1/y_0 - 1)\mathrm{e}^{-t}\bigr)$ で、$y(3) \approx 0.952574$、$z(3) \approx 0.954349$、差は約 1.77×10^{-3} である（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。実際の差は初期の差 0.01 より小さくなっており、評価はおよそ 100 倍粗い。Grönwall 型の評価は $|F'| \le 1$ という大きさの情報しか使わず、F' の符号を見ない。解が近づいていく $y = 1$ では $F'(1) = -1 < 0$ で、近くの解どうしはむしろ縮まる。例題 2.3 で反対称性を使って評価を改善したのと同じく、系の構造（ここでは安定な平衡点への収縮）を使わない限り、評価は指数関数的な増幅を見込んでしまう。この方程式一つで、存在・一意性（Picard–Lindelöf）、大域存在（アプリオリ評価）、連続依存（Grönwall）という表 2.1 の「適切性」と「誤差評価」の行がすべて使われている。

総合問題　係数つき Poisson 方程式で、射影による近似と極限による近似を比べる　★★★ 最重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

区間 $(0,1)$ で、$\kappa \ge 0$ を定数として境界値問題

$$-u'' + \kappa u = 1, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

を考え、その解を u_κ と書く。$\kappa = 0$ の解は $u_0 = x(1-x)/2$ である（例題 2.8）。$\|\cdot\|$ は $L^2(0,1)$ のノルムとする。

(1) $a_\kappa(u,v) = \int_0^1 (u'v' + \kappa uv)\,\mathrm{d}x$ とおく。$\|u'\|^2 \le a_\kappa(u,u) \le (1 + \kappa/\pi^2)\|u'\|^2$ を示し、弱形式 $a_\kappa(u,v) = \int_0^1 v\,\mathrm{d}x$（すべての $v \in H_0^1(0,1)$）の解がただ一つ存在することを示せ。（使う道具：第 2 章 §弱解とソボレフ空間 の Poincaré 不等式と Riesz の表現定理）

(2) $J_\kappa(v) = \frac{1}{2}a_\kappa(v,v) - \int_0^1 v\,\mathrm{d}x$ を試行関数 $v = a\sin(\pi x)$ に制限して最小化し、最適な a と最小値を κ の式で求めよ。（使う道具：第 2 章 §変分法の直接法、第 1 章 §近似の 3 つの型 の A 型）

(3) u_κ を求め、$\kappa = 1$ で $J_\kappa(u_\kappa)$ と (2) の最小値を比べよ。差が $\frac{1}{2}a_\kappa(v - u_\kappa, v - u_\kappa)$ に等しく、したがって正であることを示せ。（使う道具：第 2 章 §変分法の直接法 のエネルギー誤差の恒等式）

(4) $w = u_\kappa - u_0$ について $\|w'\| \le \kappa\|u_0\|/\pi = \kappa/(\pi\sqrt{120})$ を示し、$\kappa = 1$ で実際の $\|w'\|$ と比べよ。（使う道具：第 2 章 §Grönwall の不等式とデータへの連続依存 の「残差と安定性」の型、§偏微分方程式へ のエネルギー法）

(5) (2) と (4) の近似は、それぞれ第 1 章の 3 つの型のどれに当たるか。誤差を何が保証しているかを比べ、$\kappa = 10$ では (4) の近似が使えなくなる一方で (2) の近似は使えることを数値で確かめよ。（使う道具：第 1 章 §近似の 3 つの型）

解答. **(1)**（第 2 章 §弱解とソボレフ空間）$a_\kappa(u,u) = \|u'\|^2 + \kappa\|u\|^2$ で、$\kappa \ge 0$ から左の不等式が出る。Poincaré 不等式（定理 2.16、$L = 1$）$\|u\| \le \|u'\|/\pi$ から $\kappa\|u\|^2 \le (\kappa/\pi^2)\|u'\|^2$ で、右の不

等式が出る。a_κ は対称な双線形形式で、左の不等式から $a_\kappa(u,u)=0$ なら $u'=0$、境界条件から $u=0$ なので内積である。二つの不等式により、そのノルムは H^1_0 の内積 $\langle u,\,v\rangle_a=\int u'v'$ のノルムと同等なので、$H^1_0(0,1)$ は a_κ についても完備なヒルベルト空間である。右辺 $\ell(v)=\int_0^1 v\,\mathrm{d}x$ は $|\ell(v)|\le\|v\|\le\|v'\|/\pi\le a_\kappa(v,v)^{1/2}/\pi$ を満たす有界線形汎関数なので、Riesz の表現定理（定理 2.18）により $a_\kappa(u,v)=\ell(v)$ を満たす u がただ一つ存在する。

(2)（第 2 章 § 変分法の直接法、第 1 章 A 型）$\int_0^1(\pi\cos\pi x)^2\mathrm{d}x=\pi^2/2$、$\int_0^1\sin^2\pi x\,\mathrm{d}x=1/2$、$\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=2/\pi$ より

$$J_\kappa(a\sin\pi x)=\frac{\pi^2+\kappa}{4}a^2-\frac{2}{\pi}a.$$

a で微分して 0 とおくと $a=\dfrac{4}{\pi(\pi^2+\kappa)}$、最小値は $-\dfrac{4}{\pi^2(\pi^2+\kappa)}$ である。$\kappa=0$ では例題 2.8 の $a=4/\pi^3$、$-4/\pi^4$ に戻る。$\kappa=1$ では最小値は約 -0.037286 である。

(3)（第 2 章 § 変分法の直接法）$\kappa>0$ で

$$u_\kappa(x)=\frac{1}{\kappa}\left(1-\frac{\cosh\!\big(\sqrt{\kappa}\,(x-\tfrac12)\big)}{\cosh(\sqrt{\kappa}/2)}\right)$$

とおくと、$-u_\kappa''=\cosh(\sqrt{\kappa}(x-\tfrac12))/\cosh(\sqrt{\kappa}/2)$、$\kappa u_\kappa=1-\cosh(\sqrt{\kappa}(x-\tfrac12))/\cosh(\sqrt{\kappa}/2)$ で和は 1、$x=0,1$ で 0 になる。弱形式で $v=u_\kappa$ とおくと $a_\kappa(u_\kappa,u_\kappa)=\int u_\kappa$ なので $J_\kappa(u_\kappa)=-\frac12\int_0^1 u_\kappa\,\mathrm{d}x$ で、

$$\int_0^1 u_\kappa\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\kappa}-\frac{2}{\kappa^{3/2}}\tanh\frac{\sqrt{\kappa}}{2}.$$

$\kappa=1$ では $\int u_1=1-2\tanh\frac12\approx0.075766$、$J_1(u_1)\approx-0.037883$ で、試行関数の値 -0.037286 のほうが約 5.97×10^{-4} 高い（相対誤差 1.6%）。差の式は次のように出る。任意の v について

$$J_\kappa(v)-J_\kappa(u_\kappa)=\frac12 a_\kappa(v,v)-\frac12 a_\kappa(u_\kappa,u_\kappa)-\ell(v-u_\kappa),$$

で、弱形式 $\ell(v-u_\kappa)=a_\kappa(u_\kappa,v-u_\kappa)$ を代入して整理すると $\frac12 a_\kappa(v-u_\kappa,v-u_\kappa)$ になる。これは (2.7) の内積を a_κ に替えたものそのもので、$v\neq u_\kappa$ なら正である。$\kappa=1$ で $\frac12 a_1(v-u_1,v-u_1)$ を直接積分した値も 5.97×10^{-4} に一致する（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。

(4)（第 2 章 §Grönwall の不等式とデータへの連続依存、§ 偏微分方程式へ）u_0 の弱形式は $\int u_0'v'=\ell(v)$ である。u_κ の弱形式から引くと $\int w'v'+\kappa\int u_\kappa v=0$、$u_\kappa=w+u_0$ を代入して

$$\int_0^1(w'v'+\kappa wv)\,\mathrm{d}x=-\kappa\int_0^1 u_0v\,\mathrm{d}x$$

を得る。w は「残差 $-\kappa u_0$ を外力とする同じ型の方程式」の解である。$v=w$ とおき、Cauchy–Schwarz と Poincaré 不等式を使うと

$$\|w'\|^2\le\|w'\|^2+\kappa\|w\|^2=-\kappa\int_0^1 u_0w\,\mathrm{d}x\le\kappa\|u_0\|\|w\|\le\frac{\kappa\|u_0\|}{\pi}\|w'\|$$

で、$\|w'\|\le\kappa\|u_0\|/\pi$ である。$\|u_0\|^2=\frac14\int_0^1x^2(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{120}$ なので上界は $\kappa/(\pi\sqrt{120})$ で、$\kappa=1$ では約 0.0291 になる。実際の値は $\|w'\|\approx0.0264$ で、上界は実際の値の約 1.1 倍に収まっている（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。評価の形は定理 2.6 と同じく「残差の大きさ $\kappa\|u_0\|$」×「増幅率 $1/\pi$」で、増幅率を与えているのが Poincaré 不等式である。

(5)（第 1 章 § 近似の 3 つの型）(2) は解を 1 次元の部分空間 $\mathrm{span}\{\sin\pi x\}$ の中で探す A 型（射影）の近似である。(3) で示したとおり、試行関数は a_κ の内積で測った u_κ の最良近似になり、エネルギーは必ず上界で、誤差はエネルギーノルムの 2 乗で決まる。小さいパラメータは要らず、保証するのは部分空間が解をどれだけ表せるかである。(4) は κ を含む問題の族の $\kappa\to0$ の極

限問題の解 u_0 を使う B 型（極限）の近似で、誤差は κ に比例し、保証するのは κ が小さいことである。
$\kappa = 10$ では、(4) の上界は $10/(\pi\sqrt{120}) \approx 0.291$ で、u_0 自身の大きさ $\|u_0'\| = \sqrt{\int_0^1 (\frac{1}{2} - x)^2 \mathrm{d}x} = 1/\sqrt{12} \approx 0.289$ を超えてしまい、評価は何も言わない。実際の $\|w'\|$ も約 0.144 で、$\|u_0'\|$ の半分に達しているので、u_0 は u_{10} の近似として役に立たない。一方 (2) の近似は $\kappa = 10$ でも最小値 $-4/(\pi^2(\pi^2 + 10)) \approx -0.020397$ が厳密値 $J_{10}(u_{10}) \approx -0.020946$ に対して相対誤差 2.6% で、なお有効である（検算 `scripts/verify_ch02.py`）。A 型の近似は「解が部分空間で表せるか」という形の情報にしか依らないので κ の大きさを問わず、B 型の近似は「パラメータが小さいか」にしか依らないので部分空間の選び方を問わない。保証の出どころが違うので、同じ問題でも使える範囲が違う。どちらにも誤差の保証があるので、C 型（閉じる）に当たる近似はこの問題には現れない。