第 7 章

スケール分離と特異摂動：Born–Oppenheimer から境界層まで

★★★ 最重要 B 型近似のうち「小さいパラメータが最高階の微分に掛かる」ものを一つの数学で扱う章

物理屋が「速いものと遅いもの（あるいは薄い層と広い領域）を分けて考える」と言うとき、その背後にある数学は特異摂動論である。量子化学の Born – Oppenheimer 近似、半古典の WKB 近似、量子力学の断熱定理、流体の境界層理論は、扱う対象こそ違うが、いずれも「小さいパラメータ ε が方程式の最高階の微分に掛かっていて、$\varepsilon = 0$ と置くと方程式の型が変わる」という同じ構造をもつ。この章ではまず手で解けるモデル問題で特異摂動の論理（外部解・内部解・接合）を完全に追い、そのあと同じ論理が WKB・断熱定理・Born – Oppenheimer・Prandtl 境界層でどう現れ、どこで破綻するかを順に見る。第 1 章の分類では、ここで扱う近似はすべて B 型（極限）に属する。

7.1 正則摂動と特異摂動

★★★ 最重要 以後のすべての節が「どちらの摂動か」の判定から始まる

7.1.1 方程式の型が変わるかどうか

小さいパラメータ $\varepsilon > 0$ を含む問題 P_ε があり、$\varepsilon = 0$ と置いた問題 P_0 が解けるとする。素朴な期待は「P_ε の解は P_0 の解に ε の冪級数で小さな補正を足したもの」であり、この期待が正しい場合を正則摂動という。

定義 7.1 (正則摂動と特異摂動)**.** 問題 P_ε の解 u_ε が、考えている領域（空間変数・時間変数の範囲）全体で一様に

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots$$

の形で近似でき、u_0 が P_0 の解であるとき、この摂動を**正則**（regular）という。そうでないとき、すなわち $\varepsilon \to 0$ の極限で解が P_0 の解へ一様には近づかないとき、**特異**（singular）という。

定義だけでは判定に使いにくいので、実用上の目安を先に述べておく。特異摂動になるのは、ほとんどの場合 **$\varepsilon = 0$ と置くと問題の「型」が変わる**ときである。代数方程式なら次数が下がる、微分方程式なら階数が下がって課せる境界条件の数が減る、時間発展なら考える時間幅が $1/\varepsilon$ に伸びて小さな補正が積み重なる、といった変化である。型が変わると、P_ε の解のうち P_0 では表現できない部分が必ず生じ、その部分が特異性の正体になる。

例（代数方程式で根が無限遠へ逃げる） $\varepsilon x^2 + x - 1 = 0$ を考える。$\varepsilon = 0$ では 1 次方程式 $x - 1 = 0$ になり、根は $x = 1$ の 1 つだけである。一方 $\varepsilon > 0$ では 2 次方程式なので根は 2 つあり、厳密には

$$x_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

である。$\varepsilon \to 0$ で展開すると

$$x_+ = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \qquad x_- = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

となる（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。x_+ は P_0 の根 $x = 1$ の正則な摂動である。x_- は $\varepsilon \to 0$ で無限遠へ逃げ、P_0 のどの根にも対応しない。x_- を捉えるには、x の大きさが $1/\varepsilon$ 程度であることを見抜いて $x = X/\varepsilon$ と**尺度を変える**必要がある。代入すると $X^2 + X - \varepsilon = 0$ となり、今度は $\varepsilon = 0$ と置いても 2 次方程式のままなので正則摂動で $X = -1 - \varepsilon + \cdots$ が得られる。この「尺度

を変えると問題が正則になる」という操作が、以下で何度も現れる**伸長変数**（stretched variable）の原型である。

微分方程式では同じことが次の形で起こる。

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \tag{7.1}$$

$\varepsilon = 0$ と置くと $y' + y = 0$ という 1 階方程式になり、解 $y = Ce^{-x}$ は定数を 1 つしか持たないので、境界条件を 2 つ同時には満たせない。2 階方程式が持っていた解の一つ（後で見るように $e^{-x/\varepsilon}$ 程度の速さで変わる解）が $\varepsilon = 0$ の問題からは消えてしまい、その解が担っていた「境界条件の一つを合わせる」役目を誰も果たせなくなる。これが微分方程式における特異摂動の典型であり、最高階の微分 y'' に小さな係数が掛かっていることが原因である。

「最高階に小さい係数」が特異性を生む理由

係数 ε が低階の項（たとえば $y'' + y' + \varepsilon y = 0$ の εy）に掛かっている場合、$\varepsilon = 0$ としても方程式の階数は変わらず、解の空間の次元も変わらない。解は ε について滑らかに変形するだけなので正則摂動になる。最高階に掛かっている場合は、$\varepsilon = 0$ で解の空間の次元が落ちる。落ちた分の解は $\varepsilon \to 0$ で微分が $1/\varepsilon$ のように大きくなる解であり、「$\varepsilon y''$ は小さい」という前提そのものが成り立たない場所（薄い層）に住んでいる。この章で扱う近似は、すべてこの「小さいはずの項が、ある場所では小さくない」という状況の扱い方である。

7.1.2 漸近展開

特異摂動で得られる展開は、多くの場合収束しない。それでも近似として使える理由を明確にするため、「漸近展開」という概念を収束級数と区別して定義しておく。

定義 7.2 (漸近列と Poincaré の意味の漸近展開)**.** $\varepsilon \to 0$ で定義された関数の列 $\delta_0(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon), \dots$ が、各 n について $\delta_{n+1}(\varepsilon) = o(\delta_n(\varepsilon))$（すなわち $\delta_{n+1}/\delta_n \to 0$）を満たすとき、**漸近列**という。$\varepsilon^n$ や $\varepsilon^{n/2}$、$\varepsilon^n \ln \varepsilon$ を混ぜた列などがその例である。関数 $f(\varepsilon)$ が

$$f(\varepsilon) - \sum_{n=0}^{N} a_n \delta_n(\varepsilon) = o(\delta_N(\varepsilon)) \quad (\varepsilon \to 0)$$

を**すべての N について**満たすとき、$f(\varepsilon) \sim \sum_n a_n \delta_n(\varepsilon)$ と書き、これを f の（Poincaré の意味の）**漸近展開**という。

収束級数との違いは、極限をとる変数にある。収束級数は「ε を固定して項数 $N \to \infty$」で値に近づく。漸近展開は「項数 N を固定して $\varepsilon \to 0$」で誤差が最後の項より速く小さくなることだけを要求し、$N \to \infty$ で何が起こるかには何も言わない。したがって、固定した ε で項数を増やしていくと、ある項数までは誤差が減り、その先は増えていくということが普通に起こる。

例（Stirling 級数） $\ln \Gamma(z)$ の大きい z での展開

$$\ln \Gamma(z) \sim \left(z - \tfrac{1}{2}\right) \ln z - z + \tfrac{1}{2} \ln 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1) z^{2k-1}}$$

（B_{2k} は Bernoulli 数）は、$|B_{2k}|$ が $(2k)!$ のように増えるため、どの z についても収束しない。しかし項数 K で打ち切ったときの誤差を数値で調べると次のようになる（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$z = 1$	8.1×10^{-2}	2.3×10^{-3}	5.1×10^{-4}	2.9×10^{-4}	3.1×10^{-4}	5.3×10^{-4}	1.4×10^{-3}	5.0×10^{-3}	2.5×10^{-2}
$z = 2$	4.1×10^{-2}	3.3×10^{-4}	2.1×10^{-5}	3.6×10^{-6}	1.1×10^{-6}	5.4×10^{-7}	3.9×10^{-7}	3.9×10^{-7}	5.1×10^{-7}

$z=1$ では $K=3$ で誤差が最小（約 3×10^{-4}）になり、その先は増える。$z=2$ では最小が $K\approx7$ まで後退し、最小誤差も 4×10^{-7} まで下がる。z が大きいほど「使える項数」も「到達できる精度」も増える。これが漸近級数の典型的な振る舞いで、最適な打ち切り位置は項の大きさが最小になるところ（この例では $K\approx\pi z$）にあり、そこでの誤差は $\mathrm{e}^{-2\pi z}$ 程度の指数的な小ささになることが知られている。

落とし穴

「収束しない級数は近似として無意味だ」という見方は誤りである。物理で使う摂動級数の多く（量子電磁力学の結合定数展開、非調和振動子のエネルギーの摂動展開など）は収束せず、漸近級数として使われている。逆に「収束する級数なら少数項で良い近似になる」とも限らない。e^{-x} の Taylor 級数は全実数で収束するが、$x=30$ で精度よく評価するには数十項を要し、途中の項は 10^{11} を超える。近似としての良さは「少ない項で誤差がどれだけ小さいか」で測るものであり、収束性とは別の性質である。

7.1.3 展開の一様性

特異摂動の判定に直接関わるのが、展開の**一様性**である。関数 $f(x,\varepsilon)$ の展開 $f\sim\sum a_n(x)\delta_n(\varepsilon)$ が領域 D で一様であるとは、上の定義の $o(\delta_N)$ が $x\in D$ について一様に成り立つこと、すなわち

$$\sup_{x\in D}\left|f(x,\varepsilon)-\sum_{n=0}^{N}a_n(x)\delta_n(\varepsilon)\right|=o(\delta_N(\varepsilon))$$

となることをいう。各点 x で漸近展開になっていても一様とは限らない。たとえば $f(x,\varepsilon)=\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}$ は、$x>0$ を固定すれば $\varepsilon\to0$ で任意の冪 ε^N より速く 0 に近づくので、各点では漸近展開「$f\sim0$」を持つ。しかし $x=\varepsilon$ では $f=\mathrm{e}^{-1}$ であり、$\sup_{0\le x\le1}|f-0|=1$ は小さくならない。展開「$f\sim0$」は $x=\mathcal{O}(\varepsilon)$ の薄い層で破綻する。特異摂動とは、この種の非一様性が解に生じる問題のことだと言い換えてもよい。

例題 7.1　三次方程式の逃げる根 ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

$0<\varepsilon\ll1$ として、方程式 $\varepsilon x^3+x^2-1=0$ を考える。

(1) $\varepsilon=0$ と置いた方程式の根を求め、$\varepsilon>0$ のときの根の個数と比べて、この摂動が正則か特異かを判定せよ。

(2) $\varepsilon=0$ の根から続く 2 つの根を、ε の 1 次まで求めよ。

(3) 残る 1 つの根の大きさを、εx^3 と x^2 が釣り合う条件から見積もり、伸長変数を使って ε の次の項まで求めよ。3 つの根の和を根と係数の関係と比べて確かめよ。

解答. **(1)** $\varepsilon=0$ では $x^2-1=0$ で、根は $x=\pm1$ の 2 つである。$\varepsilon>0$ では 3 次方程式なので根は（重複と複素数を数えて）3 つある。$\varepsilon=0$ で次数が下がるので型が変わり、特異摂動である。$\varepsilon=0$ の方程式に対応する相手のない根が 1 つあり、次の (3) で見るようにそれが無限遠へ逃げる。
(2) $x=1+\varepsilon a+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ を代入すると $x^3=1+\mathcal{O}(\varepsilon)$、$x^2=1+2\varepsilon a+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ なので

$$\varepsilon x^3+x^2-1=\varepsilon(1+2a)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

となり、$a=-\tfrac12$ である。$x=-1+\varepsilon b+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ では $x^3=-1+\mathcal{O}(\varepsilon)$、$x^2=1-2\varepsilon b+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ なので $\varepsilon(-1-2b)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)=0$、$b=-\tfrac12$ である。よって

$$x_1=1-\tfrac12\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2),\qquad x_2=-1-\tfrac12\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

(3) 大きな根では定数項 -1 が他の 2 項に比べて小さく、εx^3 と x^2 が釣り合うので $|x| \sim 1/\varepsilon$ である。$x = X/\varepsilon$ と伸長すると $X^3/\varepsilon^2 + X^2/\varepsilon^2 - 1 = 0$、すなわち

$$X^3 + X^2 - \varepsilon^2 = 0$$

となる。$\varepsilon = 0$ と置いても 3 次のままなので、この尺度では正則摂動である。$\varepsilon = 0$ の根は $X = 0$（二重根）と $X = -1$ で、$X = 0$ の二重根は (2) の $\mathcal{O}(1)$ の 2 根を $1/\varepsilon$ の尺度で見たものに当たる。単根 $X = -1$ を $X = -1 + c\varepsilon^2$ と摂動すると $X^2(X+1) = c\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = \varepsilon^2$ から $c = 1$、したがって

$$x_3 = -\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

3 つの根の和は $(1 - \frac{1}{2}\varepsilon) + (-1 - \frac{1}{2}\varepsilon) + (-\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ であり、根と係数の関係から出る和 $-1/\varepsilon$（x^2 の係数を x^3 の係数で割って符号を変えたもの）と一致する。$\varepsilon = 0.01$ の数値解は 0.995062、-1.005064、-99.990 で、近似値 0.995、-1.005、-99.99 との差は ε^2 程度である（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。二つの尺度（$x = \mathcal{O}(1)$ と $x = \mathcal{O}(1/\varepsilon)$）のそれぞれで正則な問題を解くと、根が全部そろう。これが本節の伸長変数の考え方である。

7.2 境界層のモデル問題を完全に解く

★★★ 最重要　外部解・内部解・接合・合成解という特異摂動の手順をすべて誤差評価つきで追う

モデル問題 (7.1) を、厳密解と照らし合わせながら解く。手順は (1) 外部解、(2) 内部解、(3) 接合、(4) 合成解、(5) 誤差評価、の 5 段階である。

7.2.1 厳密解

定数係数なので特性方程式 $\varepsilon\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ から $\lambda_{1,2} = \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon}\right)/(2\varepsilon)$（$0 < \varepsilon < 1/4$）が得られ、

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 x} - \mathrm{e}^{\lambda_2 x}}{\mathrm{e}^{\lambda_1} - \mathrm{e}^{\lambda_2}}, \qquad \lambda_1 = -1 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{7.2}$$

である（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。λ_1 は $\varepsilon = 0$ の問題の根 -1 の摂動であり、λ_2 は代数方程式の例と同じく無限遠へ逃げる根である。$\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \approx \mathrm{e}^{-x/\varepsilon}$ は x が ε 程度離れるとほぼ消えるので、この解の成分は $x = 0$ の近くの幅 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の層にしか存在しない。厳密解が書けない問題でもこの構造を取り出せるようにするのが、以下の手順の目的である。

7.2.2 外部解

x が 0 から離れた領域（外部領域）では y の変化はゆるやかで、$\varepsilon y''$ は他の項より小さいと仮定する。$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots$ を代入して ε^0 の項を集めると $y_0' + y_0 = 0$ であり、解は $y_0 = C\mathrm{e}^{-x}$ である。定数を一つしか持たないので、境界条件のどちらか一方しか課せない。どちらを課すかは次の小節で内部解が決める。ここでは $x = 1$ の条件 $y_0(1) = 1$ を課して

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{1-x}$$

とする（この選択が正しいことは後の小節「境界層はどちらの端にできるか」で原理から説明する）。外部解は $y_0(0) = \mathrm{e} \neq 0$ となり、$x = 0$ の条件を破っている。

7.2.3 内部解

$x = 0$ の近くには、y が e から 0 へ急に変わる層（境界層）があるはずである。その厚さを $\delta(\varepsilon)$ として伸長変数 $X = x/\delta$、$Y(X) = y(\delta X)$ を導入すると、方程式は

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} Y'' + \frac{1}{\delta} Y' + Y = 0$$

となる。3 つの項の大きさを比べる。δ を ε より大きくとると第 2 項が最大で $Y'=0$ しか残らず、層の中で変化する解が得られない。δ を ε より小さくとると第 1 項だけが残り $Y''=0$ となるが、これでは Y' の項との釣り合いが無い。第 1 項と第 2 項が同じ大きさになる $\delta=\varepsilon$ が、二つの項が釣り合う唯一の選び方（**主要釣り合い**、distinguished limit）である。$\delta=\varepsilon$ とすると

$$Y''+Y'+\varepsilon Y=0$$

となり、今度は ε が最低階の項に掛かっているので正則摂動になる。主要項は $Y_0''+Y_0'=0$、条件 $Y_0(0)=0$ から

$$Y_0(X)=A\bigl(1-\mathrm{e}^{-X}\bigr)$$

を得る。定数 A はまだ決まらない。

7.2.4 接合

外部解は $x\to 0$ で値 e に近づき、内部解は $X\to\infty$ で値 A に近づく。両者が同じ関数の異なる領域での近似であるなら、二つの領域が重なる中間の領域で一致しなければならない。この要請を**接合条件**（matching condition）という。最も簡単な形（Prandtl の接合則）は

$$\lim_{X\to\infty} Y_0(X)=\lim_{x\to 0} y_0(x)$$

であり、$A=\mathrm{e}$ が決まる。

この条件の根拠は中間変数で確かめられる。$\varepsilon\ll\eta(\varepsilon)\ll 1$ を満たす η（たとえば $\eta=\sqrt{\varepsilon}$）をとり、$x=\eta\xi$（ξ は固定）とおく。このとき $X=x/\varepsilon=(\eta/\varepsilon)\xi\to\infty$ かつ $x=\eta\xi\to 0$ なので、中間変数で固定した点は「内部から見れば遠方、外部から見れば境界の近く」にある。外部解はそこで $\mathrm{e}^{1-\eta\xi}=\mathrm{e}+\mathcal{O}(\eta)$、内部解は $A(1-\mathrm{e}^{-\eta\xi/\varepsilon})=A+(\text{指数的に小})$ となるので、二つが同じ関数を近似するには $A=\mathrm{e}$ でなければならない。高次の項を接合するときは、外部解を内部変数で書き直して展開したものと内部解を外部変数で書き直して展開したものを、項数をそろえて比較する Van Dyke の接合則を使う。この章では主要項の接合で足りる。

7.2.5 合成解と誤差評価

外部解と内部解はそれぞれの領域でしか正しくない。全域で使える一つの式にするには、二つを足して、重なり領域で二重に数えた共通部分（e）を引けばよい。これを**合成解**（composite solution）という。

$$y_c(x)=y_0(x)+Y_0(x/\varepsilon)-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{1-x}-\mathrm{e}^{1-x/\varepsilon}. \tag{7.3}$$

$y_c(0)=0$ は正確に成り立ち、$y_c(1)=1-\mathrm{e}^{1-1/\varepsilon}$ は指数的に小さい誤差で 1 に等しい。

定理 7.3（合成解の一様誤差 ★★★ 最重要）. $0<\varepsilon\le 1/8$ に対し、(7.2) の厳密解 y と合成解 (7.3) は

$$\sup_{0\le x\le 1}|y(x)-y_c(x)|\le C\varepsilon$$

を満たす。ここで C は ε によらない定数である。さらに $\varepsilon\to 0$ で $\sup|y-y_c|/\varepsilon\to\mathrm{e}$ となる。

証明. $D=\mathrm{e}^{\lambda_1}-\mathrm{e}^{\lambda_2}$ とおく。$\lambda_1=-1-\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ と $\mathrm{e}^{\lambda_2}=\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-1/(2\varepsilon)})$ から $\mathrm{e}^{-1}/D=1+\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ である。差を二つに分ける。

$$y-y_c=\underbrace{\left[\frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 x}}{D}-\mathrm{e}^{1-x}\right]}_{\text{(i)}}-\underbrace{\left[\frac{\mathrm{e}^{\lambda_2 x}}{D}-\mathrm{e}^{1-x/\varepsilon}\right]}_{\text{(ii)}}.$$

(i) は $\mathrm{e}^{1-x}\bigl[\mathrm{e}^{(\lambda_1+1)x}\,(\mathrm{e}^{-1}/D)-1\bigr]$ と書け、$|(\lambda_1+1)x|\le 2\varepsilon$ と $\mathrm{e}^{-1}/D=1+\mathcal{O}(\varepsilon)$ から、$x\in[0,1]$ について一様に $|\text{(i)}|\le \mathrm{e}\cdot\mathcal{O}(\varepsilon)$ である。(ii) は $\mathrm{e}^{1-x/\varepsilon}\bigl[\mathrm{e}^{(\lambda_2+1/\varepsilon)x}\,(\mathrm{e}^{-1}/D)-1\bigr]$ と書ける。$\lambda_2+1/\varepsilon=1+\mathcal{O}(\varepsilon)$ なので

角括弧は $\mathrm{e}^{x(1+\mathcal{O}(\varepsilon))}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))-1=\mathcal{O}(x+\varepsilon)$（$x\le 1$ で一様）である。したがって

$$|\text{(ii)}| \le C'\mathrm{e}^{1-x/\varepsilon}(x+\varepsilon) \le C'\mathrm{e}\bigl(\sup_{x\ge 0} x\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}+\varepsilon\bigr) = C'\mathrm{e}\,\varepsilon(\mathrm{e}^{-1}+1).$$

(i) と (ii) を合わせて主張の一様評価を得る。極限値については、(ii) が $x \gg \varepsilon$ で指数的に消え、(i) が $\mathrm{e}^{1-x}\bigl(\mathrm{e}^{-\varepsilon x}(1+\varepsilon)-1\bigr)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)=\mathrm{e}^{1-x}\varepsilon(1-x)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ となることから、外部領域での誤差 $\varepsilon\,\mathrm{e}^{1-x}(1-x)$ が $x\to 0$ で最大値 $\mathrm{e}\,\varepsilon$ に近づくことによる。 □

数値で確かめると次の通りで、比 $\sup|y-y_c|/\varepsilon$ は単調に増えながら $\mathrm{e}\approx 2.718$ に近づく（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。収束が遅いのは、最大を与える点が層の外縁 $x\sim\varepsilon\ln(1/\varepsilon)$ にあり、そこで (ii) の残りがまだ完全には消えていないためである。

ε	0.1	0.05	0.01	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$\sup\lvert y-y_c\rvert$	0.110	0.0862	0.0242	2.67×10^{-3}	2.71×10^{-4}	2.72×10^{-5}
$\sup\lvert y-y_c\rvert/\varepsilon$	1.10	1.72	2.42	2.67	2.71	2.72

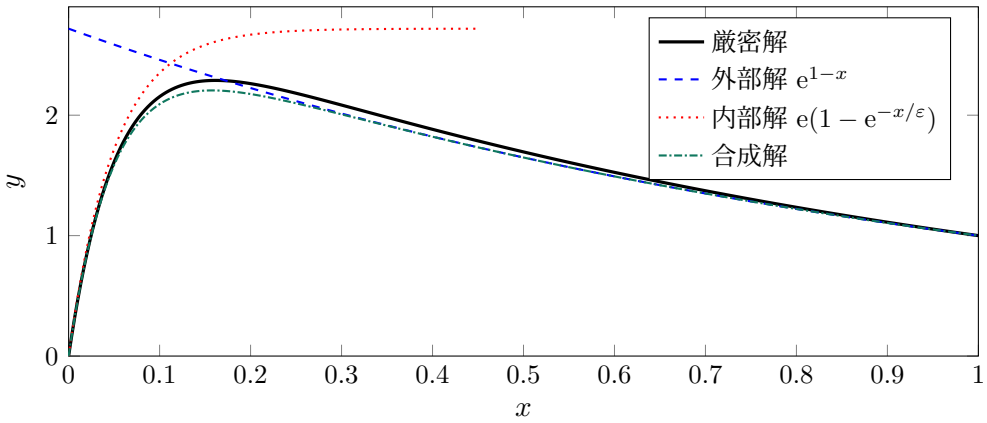


図 7.1　モデル問題 $\varepsilon y''+y'+y=0$、$y(0)=0$、$y(1)=1$ の $\varepsilon=0.05$ での厳密解・外部解・内部解・合成解。外部解は $x=0$ で境界条件を破り、内部解は層の外で一定値 e にとどまる。合成解は全域で厳密解と $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の差に収まる。

7.2.6 境界層はどちらの端にできるか

外部解に $x=1$ の条件を課したのは、境界層が $x=0$ にあると仮定したからであった。逆に $x=1$ に層を置こうとするとどうなるか。$\xi=(1-x)/\varepsilon$ を伸長変数にとると $\mathrm{d}/\mathrm{d}x=-\varepsilon^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$ なので、主要項は $Y''-Y'=0$、解は $Y=B+C\mathrm{e}^{\xi}$ となる。$\xi\to\infty$（層の外）で外部解に接合するには有界でなければならず $C=0$、すると Y は定数で境界条件の不一致を埋められない。つまり $x=1$ に境界層は作れない（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。

一般に $\varepsilon y''+a(x)y'+b(x)y=0$ で $a(x)$ が区間上で符号を変えないとき、内部方程式は $Y''\pm a\,Y'=0$ となり、層の外へ向かって減衰する解が存在するのは $a>0$ **なら左端**、$a<0$ **なら右端**だけである。この規則には物理的な意味がある。$\varepsilon y''+ay'=0$ を定常な移流拡散方程式 $\varepsilon y''=-ay'$ と読むと、$-a$ が「流れの速度」に当たり、$a>0$ なら情報は右から左へ（$x=1$ から $x=0$ へ）運ばれる。外部解は 1 階方程式すなわち純粋な移流であり、上流端（$x=1$）の境界条件を下流へ運ぶことしかできない。下流端（$x=0$）で課された条件は移流では届かないので、拡散 $\varepsilon y''$ が支配する薄い層でつじつまを合わせる。**境界層は流れの下流端にできる**というのがこの規則の内容である。$a(x)$ が区間の内部で符号を変える場合（転回点）は、層が内部に現れたり、外部解そのものが一意に決まらなくなったりする。転回点は WKB の節で別の形で再び現れる。

例題 7.2　右端にできる境界層 ★★★ 最重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

$0<\varepsilon\ll 1$ とし、境界値問題

$$\varepsilon y''-y'-y=0,\qquad y(0)=1,\quad y(1)=0$$

を考える。

(1) 境界層がどちらの端にできるかを、前小節の規則と内部方程式の解の有界性の両方から判定せよ。

(2) 外部解・内部解を主要項まで求め、接合して合成解を作れ。

(3) 厳密解の指数 $\lambda_\pm$ を ε で展開し、合成解との差が一様に $\mathcal{O}(\varepsilon)$ であることを示せ。

解答. **(1)** y' の係数は $a=-1<0$ なので、規則から境界層は右端 $x=1$ にできる。確認として、左端に層を置くと $X=x/\varepsilon$ で内部方程式 $Y''-Y'=0$、解 $B+C\mathrm{e}^{X}$ は $X\to\infty$ で増大するので接合できない。右端なら $\xi=(1-x)/\varepsilon$ で $Y''+Y'=0$、解 $B+C\mathrm{e}^{-\xi}$ は層の外で減衰して定数 B に近づくので接合できる。
(2) 外部解は $-y_0'-y_0=0$ から $y_0=C\mathrm{e}^{-x}$、左端の条件 $y_0(0)=1$ から $y_0=\mathrm{e}^{-x}$ である。内部解は $Y_0=B(1-\mathrm{e}^{-\xi})$（$Y_0(0)=0$ を満たす形）。接合 $\lim_{\xi\to\infty}Y_0=\lim_{x\to1}y_0$ から $B=\mathrm{e}^{-1}$。合成解は外部解＋内部解− 共通部分 e^{-1} で

$$y_c(x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-(1-x)/\varepsilon}.$$

(3) 特性方程式 $\varepsilon\lambda^2-\lambda-1=0$ の根は $\lambda_\pm=\bigl(1\pm\sqrt{1+4\varepsilon}\bigr)/(2\varepsilon)$ で、$\lambda_-=-1+\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$、$\lambda_+=1/\varepsilon+1+\mathcal{O}(\varepsilon)$ である。厳密解を $y=A\mathrm{e}^{\lambda_- x}+B\mathrm{e}^{\lambda_+(x-1)}$ と書くと、境界条件から $A=1+\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-1/\varepsilon})$、$B=-\mathrm{e}^{\lambda_-}+\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-1/\varepsilon})=-\mathrm{e}^{-1}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))$ である。外部の成分の差は $\mathrm{e}^{-x}\bigl(\mathrm{e}^{\varepsilon x+\mathcal{O}(\varepsilon^2)}-1\bigr)=\mathcal{O}(\varepsilon)$、内部の成分の差は本文の定理と同様に $\mathrm{e}^{-(1-x)/\varepsilon}\,\mathcal{O}\bigl((1-x)+\varepsilon\bigr)$ で、$\sup_{s\ge0}s\,\mathrm{e}^{-s/\varepsilon}=\varepsilon/\mathrm{e}$ を使うと $\mathcal{O}(\varepsilon)$ である。よって $\sup|y-y_c|=\mathcal{O}(\varepsilon)$。数値では $\varepsilon=10^{-3}$ で $\sup|y-y_c|/\varepsilon\approx0.42$ である（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。

7.3　多重尺度法と平均化

★★ 重要　時間方向の特異摂動。断熱定理・BO の「遅い変数」の数学的原型

前節の非一様性は空間の薄い層に現れた。時間発展の問題では、同じ非一様性が「長い時間」に現れる。

7.3.1　永年項による破綻

弱く減衰する振動子

$$x''+\varepsilon x'+x=0,\qquad x(0)=1,\quad x'(0)=0 \tag{7.4}$$

に素朴に $x=x_0+\varepsilon x_1+\cdots$ を代入する。ε^0 で $x_0''+x_0=0$、$x_0=\cos t$。ε^1 で

$$x_1''+x_1=-x_0'=\sin t,\qquad x_1(0)=x_1'(0)=0$$

となり、右辺が自由振動の振動数 1 と**共鳴**しているので解は

$$x_1=-\frac{t}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t$$

となる（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。$t\cos t$ のように時間とともに際限なく増える項を**永年項**（secular term）という。展開 $x\approx\cos t-(\varepsilon t/2)\cos t$ は $t=\mathcal{O}(1)$ では正しいが、$t\sim1/\varepsilon$ で第 2 項が第

1 項と同じ大きさになり、近似の意味を失う。厳密解 $x = \mathrm{e}^{-\varepsilon t/2}\bigl(\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{2\omega}\sin\omega t\bigr)$（$\omega = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$）と比べると、素朴展開の項 $1 - \varepsilon t/2$ は $\mathrm{e}^{-\varepsilon t/2}$ の Taylor 展開の最初の 2 項にすぎない。展開は各 t では正しいが、t について一様ではない。これは前節の $\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}$ と同じ型の非一様性であり、「減衰」という遅い過程を「振動」という速い過程の中で冪展開しようとしたことが原因である。

7.3.2 二つの時間尺度

多重尺度法（method of multiple scales）は、遅い時間 $T = \varepsilon t$ を独立な変数として扱う。$x = x_0(t, T) + \varepsilon x_1(t, T) + \cdots$ とおき、$\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial_t + \varepsilon\partial_T$ を使うと

$$\varepsilon^0:\ \partial_t^2 x_0 + x_0 = 0, \qquad \varepsilon^1:\ \partial_t^2 x_1 + x_1 = -2\partial_t\partial_T x_0 - \partial_t x_0.$$

第 1 式の一般解は $x_0 = A(T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \overline{A(T)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$ で、振幅 A が遅い時間の関数として残る。第 2 式の右辺は

$$-2\partial_t\partial_T x_0 - \partial_t x_0 = -\bigl(2\mathrm{i}A' + \mathrm{i}A\bigr)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \text{c.c.}$$

であり、$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}$ の成分は共鳴して永年項を生む。永年項が出ないためには、その係数が 0 でなければならない。

$$2\mathrm{i}A' + \mathrm{i}A = 0 \quad\Longrightarrow\quad A(T) = A(0)\,\mathrm{e}^{-T/2}. \tag{7.5}$$

これが**振幅方程式**であり、初期条件から $A(0) = 1/2$、したがって $x_0 = \mathrm{e}^{-\varepsilon t/2}\cos t$ となる。

この操作の数学的な中身は **Fredholm の択一定理**（可解条件）である。$Lu = \partial_t^2 u + u$ を周期 2π の関数の空間で考えると、L は核 $\mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\}$ を持つ。$Lu = f$ が周期解を持つための必要十分条件は f が核と直交すること、すなわち f が $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}$ の成分を含まないことである。永年項を消す条件はこの可解条件そのものであり、「核への射影が 0」という条件が遅い変数 $A(T)$ の発展方程式を与える。

数値で比べると、$t \in [0, 10/\varepsilon]$ での $\sup|x - \mathrm{e}^{-\varepsilon t/2}\cos t|$ は $\varepsilon = 0.1, 0.01$ でそれぞれ 0.048、0.0050 であり誤差は $\approx \varepsilon/2$ にとどまる。素朴展開の誤差は同じ区間で 4 程度に達する（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。

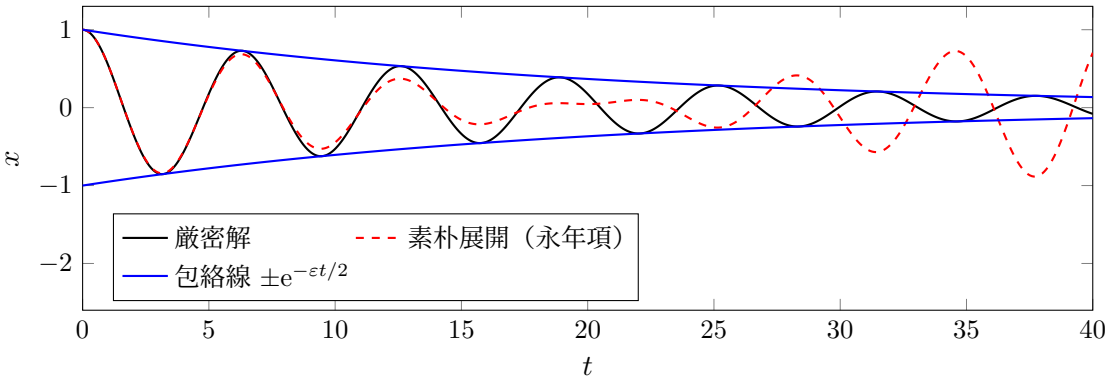


図 7.2　弱減衰振動子 (7.4)（$\varepsilon = 0.1$）。素朴展開は $t \sim 1/\varepsilon = 10$ を過ぎると永年項 $-(\varepsilon t/2)\cos t$ のために厳密解から大きく外れる。多重尺度法の振幅方程式が与える包絡線 $\mathrm{e}^{-\varepsilon t/2}$ は全区間で厳密解の振幅をなぞる。

7.3.3 振動数のずれ：Poincaré – Lindstedt

非線形の振動では、遅い時間で変わるのは振幅だけでなく位相（すなわち振動数）である。Duffing 振動子 $x'' + x + \varepsilon x^3 = 0$ では、振幅に依存して振動数がずれる。周期解を求めるだけなら、時間を $\tau = \omega t$ と伸縮して ω 自体を展開する Poincaré – Lindstedt 法が簡単である（例題で扱う）。

例題 7.3　Duffing 振動子の振動数のずれ ★★ 重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

$x'' + x + \varepsilon x^3 = 0$、$x(0) = a$、$x'(0) = 0$ を考える。

(1) 素朴な展開 $x = x_0 + \varepsilon x_1$ で x_1 の方程式を書き、永年項が現れることを示せ。

(2) $\tau = \omega t$、$\omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \cdots$、$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \cdots$ とおいて、永年項が消える条件から ω_1 を決めよ。

(3) 結果を物理的に解釈せよ（硬いばねか軟らかいばねか）。

解答. **(1)** $x_0 = a\cos t$、$x_1'' + x_1 = -a^3\cos^3 t = -a^3\left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t\right)$（恒等式 $\cos^3 t = \frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t$）。右辺の $\cos t$ が共鳴して $x_1 \ni -\frac{3}{8}a^3 t\sin t$ という永年項を生む。
(2) $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \omega\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$ なので方程式は $\omega^2\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$（ドットは τ 微分）。ε^0：$\ddot{x}_0 + x_0 = 0$、$x_0 = a\cos\tau$。ε^1：

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2\omega_1\ddot{x}_0 - x_0^3 = \left(2\omega_1 a - \tfrac{3}{4}a^3\right)\cos\tau - \tfrac{1}{4}a^3\cos 3\tau.$$

$\cos\tau$ の係数が 0 であることが永年項の出ない条件なので $\omega_1 = \frac{3}{8}a^2$、すなわち

$$\omega = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

数値積分で周期を測ると、$\varepsilon = 0.05$、$a = 1$ で $\omega = 1.01855$、公式は 1.01875 で、差は $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ の大きさ（$\approx -0.08\varepsilon^2$）である（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。
(3) $\varepsilon > 0$ は復元力 $x + \varepsilon x^3$ が変位とともに線形より強くなる硬いばねであり、振幅が大きいほど速く振動する。$\varepsilon < 0$ なら軟らかいばねで振動数は下がる。振動数が振幅に依存することは非線形振動の基本的な性質で、素朴展開ではこの位相のずれが $t\sin t$ という永年項に化けて現れていた。

7.3.4 平均化

多重尺度法の結果は、より一般的な**平均化原理**にまとめられる。振動子 $x'' + x = \varepsilon h(x, x')$ を $x = r\cos\theta$、$x' = -r\sin\theta$、$\theta = t + \varphi$ と極形式で書くと

$$r' = -\varepsilon\, h\sin\theta, \qquad r\varphi' = -\varepsilon\, h\cos\theta$$

となり、(r, φ) は $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の速さでしか変わらない遅い変数、θ は速い変数になる。遅い変数の方程式の右辺を速い変数について 1 周期平均したものに置き換えるのが平均化である。減衰振動子（$h = -x' = -r\sin\theta$）では $\overline{\sin^2\theta} = 1/2$ から $r' = -\varepsilon r/2$ となり振幅方程式 (7.5) が再現される。Duffing（$h = -x^3$）では $r\varphi' = \varepsilon r^3\overline{\cos^4\theta} = \frac{3}{8}\varepsilon r^3$ となり、例題の振動数のずれが再現される。

定理 7.4（平均化定理（一次）★★ 重要）**.** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ について $\dot{\boldsymbol{x}} = \varepsilon\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ を考え、$\boldsymbol{f}$ は t について周期 2π、$\boldsymbol{x}$ について有界な 2 階までの導関数を持つとする。平均 $\bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, t)\,\mathrm{d}t$ による平均化方程式 $\dot{\boldsymbol{y}} = \varepsilon\bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{y})$ の解で $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{x}(0)$ のものが、時間 L/ε まで考えている有界領域にとどまるなら、

$$|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| \le C\varepsilon \qquad (0 \le t \le L/\varepsilon)$$

が成り立つ。C は L と $\boldsymbol{f}$ の上界にのみよる。

証明. 近恒等変換で振動部分を取り除く。$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{y}, t) = \int_0^t\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, s) - \bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{y})\big)\mathrm{d}s$ とおくと、被積分関数の 1 周期平均が 0 なので $\boldsymbol{w}$ は t について周期的で有界である。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + \varepsilon\boldsymbol{w}(\boldsymbol{z}, t)$ で新しい変数 $\boldsymbol{z}$ を定義すると、

$$\dot{\boldsymbol{z}}\big(I + \varepsilon\partial_{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{w}\big) = \varepsilon\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z} + \varepsilon\boldsymbol{w}, t) - \varepsilon\partial_t\boldsymbol{w} = \varepsilon\bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{z}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

となる（$\partial_t \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} - \bar{\boldsymbol{f}}$ を使った）。よって $\dot{\boldsymbol{z}} = \varepsilon \bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{z}) + \varepsilon^2 \boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{R}$ は有界である。$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}$ とおくと $|\dot{\boldsymbol{e}}| \le \varepsilon K |\boldsymbol{e}| + \varepsilon^2 |\boldsymbol{R}|$（$K$ は $\bar{\boldsymbol{f}}$ の Lipschitz 定数）、$|\boldsymbol{e}(0)| \le \varepsilon \sup|\boldsymbol{w}|$ である。ここで Gronwall の不等式（$u' \le \alpha u + \beta$ なら $u(t) \le (u(0) + \beta t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ という微分不等式の比較）を使うと、$t \le L/\varepsilon$ で $|\boldsymbol{e}(t)| \le \big(\varepsilon \sup|\boldsymbol{w}| + \varepsilon^2 |\boldsymbol{R}| L/\varepsilon\big)\mathrm{e}^{KL} = \mathcal{O}(\varepsilon)$。最後に $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| = \varepsilon |\boldsymbol{w}| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ と合わせて主張を得る。 □

証明の要所は、指数 $\mathrm{e}^{\varepsilon K t}$ が $t \le L/\varepsilon$ で e^{KL} という定数にとどまることである。時間 $1/\varepsilon$ を超えるとこの定数が際限なく大きくなり、評価は保証を失う。平均化が保証するのは「遅い時間尺度 $T = \varepsilon t$ で $\mathcal{O}(1)$ の範囲」であり、それより長い時間（たとえば $1/\varepsilon^2$）を扱うには二次の平均化や、保存系なら KAM 理論のような別の道具が要る。この「速い変数について平均して遅い変数の方程式を得る」という手続きは、後の断熱定理と Born – Oppenheimer 近似で、速い電子・遅い原子核という形でもう一度現れる。

7.4 WKB 近似

★★★ 最重要 半古典近似は「最高階の係数 $\hbar^2$ が小さい」特異摂動であり、BO の核の運動の扱いの土台

7.4.1 特異摂動としての WKB

1 次元 Schrödinger 方程式 $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V\psi = E\psi$ を

$$\varepsilon\, y'' = Q(x)\, y, \qquad \varepsilon = \hbar^2, \quad Q(x) = 2m\big(V(x) - E\big) \tag{7.6}$$

と書く。最高階の微分に小さい係数 ε が掛かっており、$\varepsilon = 0$ では $Qy = 0$、すなわち $y = 0$ という無意味な方程式になる。モデル問題よりも極端な特異摂動であり、解は全域で ε に依存した速い変化（波長 $\hbar/p$ の振動、または減衰）をする。したがって冪展開ではなく、指数の肩を展開する。

$$y = \exp\!\Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\big(S_0(x) + \sqrt{\varepsilon}\, S_1(x) + \varepsilon S_2(x) + \cdots\big)\Big).$$

代入して ε^0、$\varepsilon^{1/2}$ の項をそろえると

$$(S_0')^2 = Q \quad \text{（アイコナール方程式）}, \qquad 2S_0'S_1' + S_0'' = 0 \quad \text{（輸送方程式）}$$

が得られる。第 1 式から $S_0 = \pm\int^x \sqrt{Q}\,\mathrm{d}x'$、第 2 式から $S_1' = -Q'/(4Q)$ すなわち $S_1 = -\frac{1}{4}\ln Q$（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。よって

$$y \sim Q(x)^{-1/4} \exp\!\Big(\pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int^x \sqrt{Q(x')}\,\mathrm{d}x'\Big). \tag{7.7}$$

古典的に許された領域（$E > V$、$Q < 0$）では $p(x) = \sqrt{2m(E - V)}$ を局所運動量として $Q = -p^2$、$\sqrt{Q} = \mathrm{i}p$ であり、$\psi \sim p^{-1/2}\exp(\pm\mathrm{i}\int p\,\mathrm{d}x/\hbar)$ となる。振幅 $p^{-1/2}$ は「粒子が速く通る場所ほど見つかりにくい」という古典的な滞在時間の比 $|\psi|^2 \propto 1/p$ に対応し、輸送方程式は確率の流れの保存 $|\psi|^2 p =$ 一定 を表す。

展開が意味を持つ条件は、次の項 εS_2 が小さいことである。計算すると $\sqrt{\varepsilon}\,|Q'|/|Q|^{3/2} \ll 1$、物理の言葉では「局所的な de Broglie 波長 $\lambda = 2\pi\hbar/p$ の間にポテンシャルがほとんど変わらない」（$|\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}x| \ll 1$）という条件になる。

7.4.2 転回点と Airy 関数による接続

$Q(x) = 0$、すなわち $V = E$ となる**転回点**では (7.7) の振幅 $Q^{-1/4}$ が発散し、WKB は破綻する。これは境界層の状況と同じで、転回点のまわりの薄い層では「速い変化」の仮定が成り立たない。層の中では別の伸長変数で内部問題を解き、外側の WKB 解（外部解に当たる）と接合する。

転回点 $x = a$ で $V'(a) > 0$（右側が禁止領域）とし、$Q \approx Q_1(x - a)$、$Q_1 = 2mV'(a) > 0$ と線形化する。伸長変数を

$$z = \Big(\frac{Q_1}{\varepsilon}\Big)^{1/3}(x - a)$$

とおくと (7.6) は $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}z^2 = z\,y$（Airy 方程式）になる。層の幅は $\varepsilon^{1/3} = \hbar^{2/3}$ であり、モデル問題の幅 ε とは指数が違うが、主要釣り合いから層の幅が決まる論理は同じである。禁止領域 $z \to +\infty$ で減衰する解は Airy 関数 $\mathrm{Ai}(z)$ で、その両側の漸近形は

$$\mathrm{Ai}(z) \sim \frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}\,z^{1/4}} \ (z \to +\infty), \qquad \mathrm{Ai}(z) \sim \frac{\cos\!\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\,|z|^{1/4}} \ (z \to -\infty)$$

である（$z = \pm 6, \pm 10$ で数値と照合、検算 `scripts/verify_ch07.py`）。

接合は、内部変数で $|z| \gg 1$（Airy の漸近形が使える）かつ外部変数で $|x-a| \ll 1$（線形化が使える）という重なり領域 $\hbar^{2/3} \ll |x-a| \ll 1$ で行う。そこでは $\int_x^a p\,\mathrm{d}x'/\hbar = \frac{2}{3}|z|^{3/2}$、$p^{-1/2} \propto |z|^{-1/4}$ が成り立つ（線形化した $p = \sqrt{Q_1(a-x)}$ で直接積分すれば確かめられる）。したがって Airy の両側の漸近形は、外部の WKB 解の言葉で

$$\frac{2}{\sqrt{p}}\cos\!\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^a p\,\mathrm{d}x' - \frac{\pi}{4}\right) \quad\longleftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{|p|}}\exp\!\left(-\frac{1}{\hbar}\int_a^x |p|\,\mathrm{d}x'\right) \tag{7.8}$$

という対応（接続公式）になる。左右の係数 2 と 1 は Airy の漸近形の係数 $1/\sqrt{\pi}$ と $1/(2\sqrt{\pi})$ の比から来ており、位相 $-\pi/4$ は転回点で波が「4 分の 1 波長分だけ遅れて」反射されることを表す。

接続公式の向き

接続公式 (7.8) は、禁止領域で減衰する解から許容領域の振動解へ向かう方向に使うのが安全である。逆向きに使うと、許容領域側の位相がわずかにずれただけで禁止領域に指数的に増大する解が混ざり、その係数は WKB の精度では決まらない。数学的には、増大解に比べて指数的に小さい減衰解の係数は漸近展開では捉えられない（Stokes 現象）ためである。

7.4.3 Bohr – Sommerfeld の量子化条件

2 つの転回点 $a < b$ の間の井戸を考える。左の転回点 a から接続すると許容領域の解は $\cos\!\left(\int_a^x p/\hbar - \pi/4\right)$ に、右の転回点 b から接続すると $\cos\!\left(\int_x^b p/\hbar - \pi/4\right)$ に比例する。$\Phi = \int_a^b p\,\mathrm{d}x/\hbar$ とおくと後者は $\cos\!\left(\Phi - \pi/2 - \left(\int_a^x p/\hbar - \pi/4\right)\right)$ と書け、二つが同じ関数（の定数倍）であるためには $\Phi - \pi/2 = n\pi$ でなければならない。よって

$$\oint p\,\mathrm{d}x = 2\int_a^b p\,\mathrm{d}x = 2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{7.9}$$

を得る。古い量子論の量子化条件に $1/2$ が付いた形であり、この $1/2$ は二つの転回点での $\pi/4$ の位相の和から来ている。

例題 7.4　調和振動子と四次ポテンシャルの WKB 準位 ★★★ 最重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

(1) $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ に (7.9) を適用し、$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ を導け。

(2) $\hbar = 1$、$2m = 1$ の単位で $V = x^4$ の WKB 準位を $I = \int_0^1 \sqrt{1 - u^4}\,\mathrm{d}u$ を用いて表せ。

(3) (2) を数値解と比べた結果から、WKB の精度が n とともにどう変わるかを、展開パラメータの観点から説明せよ。

解答. **(1)** 転回点は $\pm A$、$A = \sqrt{2E/(m\omega^2)}$。$\oint p\,\mathrm{d}x = 2\int_{-A}^{A}\sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2x^2)}\,\mathrm{d}x$ は楕円 $p^2/(2mE) + x^2/A^2 = 1$ の面積 $\pi\sqrt{2mE}\,A = 2\pi E/\omega$ に等しい（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。(7.9) から $2\pi E/\omega = 2\pi\hbar(n + \frac{1}{2})$、すなわち $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$。調和振動子では WKB が全準位で厳密値を与える。これは偶然ではなく、高次の補正 $S_2, S_3, \dots$ の量子化条件への寄与が二次ポ

テンシャルではすべて打ち消し合うためである。
(2) $p=\sqrt{E-x^4}$、転回点 $\pm E^{1/4}$。$x=E^{1/4}u$ と置換して $\oint p\,\mathrm{d}x = 4E^{3/4}I$。量子化条件 $4E^{3/4}I = 2\pi(n+\tfrac12)$ から

$$E_n^{\mathrm{WKB}} = \Bigl(\frac{\pi(n+\frac12)}{2I}\Bigr)^{4/3}, \qquad I \approx 0.87402.$$

(3) 有限差分で数値的に解いた固有値と比べると次の通り（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。

n	0	1	2	3	4	5
数値解	1.0604	3.7997	7.4557	11.6447	16.2618	21.2383
WKB	0.8671	3.7519	7.4140	11.6115	16.2336	21.2137
相対誤差	−18%	−1.3%	−0.56%	−0.29%	−0.17%	−0.12%

WKB の展開パラメータは「ポテンシャルの変化の尺度に対する de Broglie 波長の比」であり、量子数 n が大きいほど波長は井戸の幅に比べて短くなる。実効的な $\hbar$ は $1/n$ 程度と見なせるので、n が大きいほど精度が上がる。$n=0$ では波長が井戸の幅と同程度で、転回点の層（幅 $\hbar^{2/3}$）が井戸全体を覆ってしまい、誤差は 18% に達する。

7.5 断熱定理

★★★ 最重要 「速い自由度は遅い変化に追随する」という BO の直観を、ギャップ条件つきの定理にする

7.5.1 主張

ハミルトニアンが遅い時間 $s=\varepsilon t$ の関数 $H(s)$ として変わる状況を考える。時間を s で測ると Schrödinger 方程式は

$$\mathrm{i}\varepsilon\,\partial_s \psi(s) = H(s)\psi(s), \qquad 0\le s\le 1 \tag{7.10}$$

となり、時間微分という「最高階」の項に小さい係数 ε が掛かる。形式的に $\varepsilon=0$ とすると $H(s)\psi=0$ という固有値問題（の残骸）になり、これは WKB と同じ型の特異摂動である。

定理 7.5 (断熱定理 ★★★ 最重要)**.** $H(s)$ を有限次元のエルミート行列で s について 2 回連続微分可能とし、固有値 $E_n(s)$ が他の固有値から

$$g = \min_{0\le s\le 1}\ \min_{m\neq n} |E_m(s)-E_n(s)| > 0$$

だけ離れている（**ギャップ条件**）とする。対応する規格化固有ベクトル $\varphi_n(s)$ から出発した (7.10) の解 $\psi(s)$ は

$$\min_{\gamma\in\mathbb{R}} \|\psi(s) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\varphi_n(s)\| \le C\varepsilon \qquad (0\le s\le 1)$$

を満たす。C は $\|H'\|/g^2$、$\|H''\|/g^2$、$\|H'\|^2/g^3$ の程度の量で上から押さえられる。

断熱定理は Born と Fock（1928）が原型を述べ、加藤敏夫（1950）がスペクトル射影を用いて無限次元の場合も含む形に整えた。加藤の議論は離散固有値を他のスペクトルから分けるギャップさえあれば、ヒルベルト空間（内積を持つ完備なベクトル空間。第 3 章参照）上の自己共役作用素についてそのまま成り立つ。

> 証明の骨格（有限次元・非縮退）．固有ベクトルの位相を $\langle\varphi_k(s)|\varphi_k'(s)\rangle = 0$ となるように選ぶ（平行移動のゲージ）。動的位相 $\theta_k(s)=\int_0^s E_k$ を用いて $\psi=\sum_k c_k(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k(s)/\varepsilon}\varphi_k(s)$ と展開し、(7.10) に代入して φ_k との内積をとると
>
> $$c_k' = -\sum_{m\neq k} c_m\, M_{km}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k-\theta_m)/\varepsilon}, \qquad M_{km} = \langle\varphi_k|\varphi_m'\rangle = \frac{\langle\varphi_k|H'|\varphi_m\rangle}{E_m-E_k}$$

を得る。最後の等式は $H\varphi_m = E_m\varphi_m$ を s で微分して φ_k との内積をとれば出る。$c_n(0)=1$、他は 0 から出発する。
要点は、右辺の位相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k-\theta_m)/\varepsilon}$ が s について周期 $\sim \varepsilon/g$ で速く振動することである。

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k-\theta_m)/\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\mathrm{i}(E_k-E_m)}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k-\theta_m)/\varepsilon}$$

と書き直して $c_k(s) = -\int_0^s \sum_m c_m M_{km}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k-\theta_m)/\varepsilon}$ を部分積分すると、境界項は $\varepsilon|c_m M_{km}|/g \le \varepsilon\|H'\|/g^2$ の大きさで、残る積分は $\varepsilon\int|(c_m M_{km}/(E_k-E_m))'|$ になる。後者には c_m' が入るが、c_m' 自身が上の式で $|c|$ と M で押さえられるので、Gronwall の不等式で閉じた評価にでき、$k\neq n$ について $|c_k(s)| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ を得る。c_n は規格化から $|c_n| = 1-\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ である。 □

物理の直観「ゆっくり変えれば固有状態にとどまる」は、この証明では**速い位相の振動による打ち消し**として現れる。遷移の振幅は、変化の速さ $\varepsilon\|H'\|$ と、遷移先との位相の回る速さ g の比で決まる。直観が明示しない条件は二つある。第一に、ギャップ g が全時間で正であること。第二に、「ゆっくり」は $\varepsilon\|H'\| \ll g^2$ という、ギャップの **2 乗**との比較で測られることである。$1/g^2$ の一方は M_{km} の分母、もう一方は部分積分で出る位相の周期から来る。

7.5.2 ギャップが小さいとき：Landau – Zener 遷移

ギャップ条件が破れかけた状況の典型が Landau – Zener 模型である。

$$H(t) = \begin{pmatrix} \alpha t/2 & \Delta/2 \\ \Delta/2 & -\alpha t/2 \end{pmatrix}$$

は、傾き $\pm\alpha/2$ で交差する二つの準位（非断熱準位）が結合 $\Delta/2$ で避け合う状況を表し、断熱準位のギャップは $t=0$ で最小値 Δ をとる。$t=-\infty$ で下の断熱状態にいた系が $t=+\infty$ で上の断熱状態へ移っている確率は

$$P_{\mathrm{LZ}} = \exp\!\left(-\frac{\pi\Delta^2}{2\hbar\alpha}\right)$$

で与えられる（Landau と Zener が 1932 年に独立に導いた）。Schrödinger 方程式の数値積分と比べると、$(\alpha,\Delta) = (1,0.5),(1,1),(2,0.6)$（$\hbar=1$）で数値 0.669, 0.206, 0.751、公式 0.675, 0.208, 0.754 であり、差は有限の積分区間による（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。

この式を断熱定理と比べると二つのことが分かる。一つは、断熱性の条件が $\hbar\alpha \ll \Delta^2$、すなわち「変化の速さ $\|\dot H\| \sim \alpha$ がギャップの 2 乗より小さい」という形で現れることで、定理の $\varepsilon\|H'\|/g^2$ と一致している。もう一つは、遷移確率が ε（ここでは $\hbar\alpha/\Delta^2$）の冪ではなく $\exp(-c/\varepsilon)$ という形で小さいことである。定理が保証する $\mathcal{O}(\varepsilon)$ は時間発展の途中の「一時的なずれ」の大きさであり、ハミルトニアンが両端で一定になる滑らかな変化ではこのずれは終状態ではほぼ戻る。最終的に残る遷移は ε のどの冪よりも小さく、漸近展開には現れない。Stirling 級数の最適打ち切り誤差が $\mathrm{e}^{-2\pi z}$ であったことと同じく、指数的に小さい量は冪展開の外側にある。ギャップが閉じる（$\Delta\to 0$）と $P_{\mathrm{LZ}}\to 1$ となり、系は断熱状態にとどまらず非断熱準位に沿って交差点を素通りする。

例題 7.5　回転する磁場の中のスピン　★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

$\hbar=1$ とし、スピン 1/2 のハミルトニアン

$$H(t) = \frac{\omega}{2}\bigl(\cos\Omega t\,\sigma_z + \sin\Omega t\,\sigma_x\bigr), \qquad 0\le t\le T, \quad \Omega = \frac{\pi}{T}$$

を考える。磁場の向きは時間 T をかけて一定の角速度で $+z$ から $-z$ へ回る。時刻 0 で瞬間の基底状態 $|\downarrow\rangle$ から出発する。

(1) 瞬間の固有値とギャップ g を求めよ。$s=t/T$ を時間にとって (7.10) の形に書き、ε と $\|H'(s)\|$ を求めよ。

(2) $R(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t\sigma_y/2}$ として $\psi = R(t)\chi$ と置くと、χ が時間によらないハミルトニアン $K = \frac{\omega}{2}\sigma_z - \frac{\Omega}{2}\sigma_y$ で発展することを示せ。瞬間の励起状態にいる確率 $P(t)$ を求めよ。

(3) $\omega=1$、$T=10\pi$ のとき、P の最大値と、固有状態からのずれ $\min_\gamma\|\psi-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\varphi_0\|$ の大きさを求め、断熱定理の目安 $\varepsilon\|H'\|/g^2$ と比べよ。

解答. **(1)** $(\cos\Omega t\,\sigma_z+\sin\Omega t\,\sigma_x)^2=1$ なので固有値は $\pm\omega/2$ で、ギャップは時刻によらず $g=\omega$ である。$s=t/T$ とおくと $\mathrm{d}/\mathrm{d}t=T^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}s$ なので Schrödinger 方程式は $\mathrm{i}T^{-1}\partial_s\psi=H(s)\psi$、$H(s)=\frac{\omega}{2}(\cos\pi s\,\sigma_z+\sin\pi s\,\sigma_x)$ となる。よって $\varepsilon=1/T$、$H'(s)=\frac{\pi\omega}{2}(-\sin\pi s\,\sigma_z+\cos\pi s\,\sigma_x)$ で $\|H'(s)\|=\pi\omega/2$ である。
(2) $R(t)$ は y 軸まわりの角 Ωt の回転で、$R\sigma_zR^\dagger=\cos\Omega t\,\sigma_z+\sin\Omega t\,\sigma_x$ を満たす。したがって $H(t)=R\,\frac{\omega}{2}\sigma_z\,R^\dagger$ である。$R'=-\frac{\mathrm{i}\Omega}{2}\sigma_yR$ を使って $\mathrm{i}\psi'=H\psi$ に $\psi=R\chi$ を代入すると

$$\mathrm{i}\Big(-\frac{\mathrm{i}\Omega}{2}\sigma_yR\chi+R\chi'\Big)=R\,\frac{\omega}{2}\sigma_z\chi\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{i}\chi'=\Big(\frac{\omega}{2}\sigma_z-\frac{\Omega}{2}\sigma_y\Big)\chi=K\chi$$

となる（σ_y と R は可換）。瞬間の励起状態は $R(t)|\uparrow\rangle$ なので、そこにいる確率は $P(t)=|\langle\uparrow|\chi(t)\rangle|^2$ である。$W=\sqrt{\omega^2+\Omega^2}$、$\boldsymbol{n}=(0,-\Omega/W,\omega/W)$ とおくと $K=\frac{W}{2}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$、$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kt}=\cos\frac{Wt}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{Wt}{2}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ であり、$\langle\uparrow|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}|\downarrow\rangle=n_x-\mathrm{i}n_y=\mathrm{i}\Omega/W$ から

$$P(t)=\frac{\Omega^2}{\omega^2+\Omega^2}\,\sin^2\frac{Wt}{2}.$$

(3) $\Omega=\pi/T=0.1$ なので $P_{\max}=0.01/1.01=9.9\times10^{-3}$ である。ずれは $\min_\gamma\|\psi-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\varphi_0\|=\sqrt{2-2\sqrt{1-P}}\approx\sqrt{P}$ で、最大でも $\Omega/W\approx0.0995$ である。断熱定理の目安は $\varepsilon\|H'\|/g^2=\frac{1}{T}\cdot\frac{\pi\omega}{2}\cdot\frac{1}{\omega^2}=\frac{\Omega}{2\omega}=0.05$ で、係数 2 を除いて一致し、どちらも $1/T$ に比例する。T を 2 倍にすればずれは半分になり、定理の $\mathcal{O}(\varepsilon)$ がそのまま見える。断熱性を決めているのは、磁場が回る角速度 Ω と、ギャップで決まる位相の回る速さ ω の比である。
ずれは時間とともに減らず、周期 $2\pi/W$ で振動し続ける。終時刻 $t=T$ では位相の巡り合わせで $P=6.1\times10^{-5}$ と小さいが（検算 `scripts/verify_ch07.py`）、T を少し変えると $P_{\max}$ の程度まで戻る。これは $H'(s)$ が $s=0,1$ で不連続に立ち上がり、立ち下がるためである。回し始めと回し終わりを滑らかにすると、前小節の Landau–Zener 遷移の議論と同じく、終状態に残る遷移は ε の冪より速く小さくなる。

7.6 Born – Oppenheimer 近似の構造

★★★ 最重要　分子の量子化学の土台。質量比を小パラメータとする特異摂動として読む

7.6.1 質量比によるスケーリング

原子単位（$\hbar=m_e=e=1$）で、核の質量を簡単のため全部 M とすると、分子のハミルトニアンは

$$H=-\frac{1}{2M}\Delta_{\boldsymbol{R}}+H_e(\boldsymbol{R}),\qquad H_e(\boldsymbol{R})=-\frac{1}{2}\Delta_{\boldsymbol{r}}+V(\boldsymbol{r},\boldsymbol{R})$$

と書ける。$\boldsymbol{R}$ は核の座標、$\boldsymbol{r}$ は電子の座標、V はすべての Coulomb 相互作用である。$H_e(\boldsymbol{R})$ は核を $\boldsymbol{R}$ に固定したときの電子のハミルトニアンで、その固有値 $E_k(\boldsymbol{R})$ を**ポテンシャルエネルギー曲面**、固有関数を $\varphi_k(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})$ と書く。Born と Oppenheimer（1927）にならい

$$\kappa=\Big(\frac{m_e}{M}\Big)^{1/4}$$

とおくと、核の運動エネルギーは $-\frac{\kappa^4}{2}\Delta_{\boldsymbol{R}}$ となる。最高階の微分（$\boldsymbol{R}$ についての 2 階微分）に小さい係数 κ^4 が掛かっているので、これは WKB と同じ型の特異摂動であり、核の運動は実効的な $\hbar_{\mathrm{eff}}=\kappa^2$ を持つ半古典的な運動になる。

なぜ κ^4 の 4 乗根をとるのかは、エネルギーの階層を見ると分かる。電子の基底状態の曲面 $E_0(\boldsymbol{R})$ がある平衡点 $\boldsymbol{R}_0$ で最小になるとして、そのまわりで $E_0 \approx E_0(\boldsymbol{R}_0) + \frac{1}{2}k\xi^2$（$\xi = |\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0|$、$k = \mathcal{O}(1)$）と近似する。核の方程式 $\left[-\frac{\kappa^4}{2}\partial_\xi^2 + \frac{1}{2}k\xi^2\right]\chi = \epsilon\chi$ で $\xi = \kappa\,\eta$ と伸長すると

$$-\frac{\kappa^4}{2}\partial_\xi^2 + \frac{1}{2}k\xi^2 = \kappa^2\left[-\frac{1}{2}\partial_\eta^2 + \frac{1}{2}k\eta^2\right]$$

となる（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。括弧の中は $\mathcal{O}(1)$ の調和振動子なので、**振動の広がりは** κ、**振動エネルギーは** κ^2 である。回転は、核間距離 $R_0 = \mathcal{O}(1)$ の剛体回転子のエネルギー $\ell(\ell+1)/(2MR_0^2)$ が κ^4 に比例するので**回転エネルギーは** κ^4 である。電子の励起エネルギーは $\mathcal{O}(1)$ なので

$$E_{\text{電子}} : E_{\text{振動}} : E_{\text{回転}} \sim 1 : \kappa^2 : \kappa^4$$

という階層が質量比だけから出る。κ の 4 乗根は、この階層を整数冪で並べるための選び方である。

例題 7.6　水素分子のエネルギー階層の見積もり ★★★ 最重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

H_2 の核の換算質量は陽子質量の半分 $\mu = M_p/2$ である（$M_p/m_e \approx 1836$）。

(1) $\kappa^4 = m_e/\mu$、κ^2、κ を求めよ。

(2) 実測の振動定数 $\omega_e \approx 4401\ \text{cm}^{-1}$、回転定数 $B_e \approx 60.85\ \text{cm}^{-1}$ を Hartree 単位（$1\,E_h = 27.211\ \text{eV}$、$1\ \text{eV} = 8065.5\ \text{cm}^{-1}$）に直し、$\kappa^2$、$\kappa^4$ と比べよ。回転の代表値は $\ell = 0 \to 1$ の間隔 $2B_e$ とする。

(3) 振動の広がり κ が核間距離（約 $1.4\,a_0$）に比べてどの程度かを述べ、調和近似の妥当性を論じよ。

解答. **(1)** $\kappa^4 = 2/1836 = 1.09 \times 10^{-3}$、$\kappa^2 = 0.033$、$\kappa = 0.18$。
(2) $\hbar\omega = 4401/8065.5\ \text{eV} = 0.546\ \text{eV} = 0.0201\,E_h$、$2B_e = 15.1\ \text{meV} = 5.55 \times 10^{-4}\,E_h$ である（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。比をとると $\hbar\omega/\kappa^2 \approx 0.61$、$2B_e/\kappa^4 \approx 0.51$ で、どちらも $\mathcal{O}(1)$ の係数で一致する。電子励起は $\mathcal{O}(1)\,E_h$（H_2 の最低励起は約 11 eV $\approx 0.4\,E_h$）なので、電子・振動・回転のエネルギーの実測の比 $0.4 : 0.02 : 0.0006$ は $1 : \kappa^2 : \kappa^4$ の階層と桁でそろっている。
(3) 振動の零点振幅は $\kappa \approx 0.18\,a_0$ 程度で、核間距離 $1.4\,a_0$ の 1 割強である。ポテンシャルを 2 次で打ち切った誤差は相対的に $\xi/R_0 \sim \kappa$ の程度なので、H_2 では調和近似は 1 割程度の精度でしか成り立たない。実際 H_2 は非調和性の大きい分子として知られ、高い振動準位ほど間隔が詰まる。κ は最も軽い分子で最大になるので、重い核の分子ほど階層の分離もよく、調和近似も良くなる。

7.6.2 BO 近似と非断熱結合

全波動関数を電子の固有関数で展開する。

$$\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}) = \sum_k \chi_k(\boldsymbol{R})\,\varphi_k(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{R}).$$

$H\Psi = E\Psi$ に代入し φ_n との内積を $\boldsymbol{r}$ についてとると、$\Delta_{\boldsymbol{R}}$ が積 $\chi_k\varphi_k$ に作用することから

$$\left[-\frac{\kappa^4}{2}\Delta_{\boldsymbol{R}} + E_n(\boldsymbol{R})\right]\chi_n - \kappa^4\sum_k\left[\boldsymbol{d}_{nk}\cdot\nabla_{\boldsymbol{R}} + \frac{1}{2}D_{nk}\right]\chi_k = E\chi_n \tag{7.11}$$

を得る。ここで $\boldsymbol{d}_{nk} = \langle\varphi_n|\nabla_{\boldsymbol{R}}\varphi_k\rangle$、$D_{nk} = \langle\varphi_n|\Delta_{\boldsymbol{R}}\varphi_k\rangle$ は**非断熱結合**で、核の運動量演算子が電子の波動関数の $\boldsymbol{R}$ 依存性に作用することから生じる。展開は厳密であり、近似はまだしていない。

Born – Oppenheimer 近似は、(7.11) の $k \neq n$ の結合を捨て、核が単一の曲面 $E_n(\boldsymbol{R})$ の上を運動するとみなすものである（対角項 D_{nn} を残すものを断熱近似と呼んで区別することもある）。捨てた項の大きさをスケーリングで見積もる。

- 断熱定理と同じく、H_e を $\boldsymbol{R}$ で微分した式から $\boldsymbol{d}_{nk} = \langle \varphi_n | \nabla_{\boldsymbol{R}} V | \varphi_k \rangle / (E_k - E_n)$ であり、$|\boldsymbol{d}_{nk}| \sim 1/g$（$g$ は電子準位のギャップ）である。
- 核の波動関数は幅 κ の振動状態なので $\nabla_{\boldsymbol{R}} \chi \sim \chi/\kappa$ である。
- したがって結合項 $\kappa^4 \boldsymbol{d}_{nk} \cdot \nabla \chi_k$ は $\kappa^4 \cdot \kappa^{-1}/g = \kappa^3/g$ の大きさである。

これは振動エネルギー κ^2 より κ/g 倍小さい。エネルギーへの寄与は 2 次摂動で $(\kappa^3/g)^2/g = \kappa^6/g^3$ となり、回転エネルギー κ^4 よりも高次である。一方、対角補正 $\frac{\kappa^4}{2} D_{nn}$ は κ^4 の大きさで回転と同じ次数に入る。この見積もりから、BO 近似は**電子のギャップ g が κ より十分大きい**限りにおいて、κ についての漸近展開の最初の項として正当化されるものだと分かる。数学的な厳密化は、Combes・Duclos・Seiler による固有値の漸近展開や、Hagedorn による時間依存の問題での κ についての漸近展開（核の波束が曲面上を半古典的に運動する解の構成）などの仕事で与えられている。いずれも、ギャップ条件が考えている核の配置の範囲で一様に成り立つことを仮定している。

BO は断熱定理の空間版

核の振動の周期は $1/\kappa^2$（原子単位の時間）で、電子の運動の時間尺度 $\mathcal{O}(1)$ より κ^{-2} 倍長い。電子から見ると、核の配置 $\boldsymbol{R}(t)$ は遅い時間 $s = \kappa^2 t$ で変わるパラメータであり、電子のハミルトニアン $H_e(\boldsymbol{R}(t))$ は断熱定理の $H(s)$ の形をしている。断熱定理が「ギャップがあれば電子は瞬間ごとの固有状態 $\varphi_n(\boldsymbol{R}(t))$ にとどまる」と言い、その結果として核は曲面 E_n の上を動く。断熱定理の誤差を支配した $\|H'\|/g^2$ が、ここでは非断熱結合 $\boldsymbol{d}_{nk} \sim 1/g$ と核の速度の積として現れる。速いもの（電子）と遅いもの（核）を分けるという物理の直観は、数学的には「遅い変数を固定して速い変数の固有値問題を解き、その固有値を遅い変数のポテンシャルとして使う」という手続きであり、平均化・多重尺度法と同じ構造をもつ。

7.6.3 円錐交差で BO は破綻する

二つの電子の曲面 $E_1(\boldsymbol{R})$、$E_2(\boldsymbol{R})$ が核配置のある点 $\boldsymbol{R}_c$ で縮退すると、ギャップ条件が破れる。多原子分子では、核の自由度が 2 つ以上あれば、二つの曲面は一般に点で接して円錐形に交わる（**円錐交差**）。交差点の近くではギャップが $g \approx c|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_c|$ と線形に閉じ、非断熱結合は $|\boldsymbol{d}_{12}| \sim 1/|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_c|$ と発散する。上の見積もりで結合項 κ^3/g が振動エネルギー κ^2 と同じ大きさになるのは $g \sim \kappa$、すなわち $|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_c| \lesssim \kappa$ の領域である。核の波束がこの領域に入ると、Landau – Zener の議論と同様に、系は一方の曲面から他方へ $\mathcal{O}(1)$ の確率で移る。光化学反応で励起状態から基底状態への速い無放射遷移が起こるのは、この円錐交差を通る経路があるためと理解されている。

円錐交差にはもう一つ、BO 近似の内部では見えない幾何学的な性質がある。実数に選んだ電子の固有関数 $\varphi_n(\boldsymbol{R})$ は、交差点を一周する経路に沿って連続に追うと符号が反転する（Berry 位相 π）。このため、交差点を囲む核の運動を BO の単一曲面で記述する際には、核の波動関数にも符号の反転を補う境界条件を課す必要がある。Herzberg と Longuet-Higgins が指摘したこの性質は、非断熱結合 $\boldsymbol{d}_{nn}$ の虚部がベクトルポテンシャル（Berry 接続）として核の方程式に残る、という形で一般化される。

落とし穴

「BO 近似は核が重いから正しい」という説明は、条件の半分しか述べていない。質量比 κ が小さいことに加え、電子準位のギャップ g が κ に比べて大きいことが必要であり、後者は核配置ごとに成り立ったり破れたりする。平衡点のまわりの基底状態の振動・回転スペクトルではほぼ常に成り立つが、光励起後の動力学・解離・電荷移動のように核が曲面の交差点の近くを通る過程では BO 近似は出発点として使えない。

7.7 流体の境界層

★★★ 最重要 流体力学最大の特異摂動。Euler と Navier – Stokes の間の「薄い層」を数学で扱う

7.7.1 非粘性極限は特異極限である

非圧縮 Navier – Stokes 方程式を、代表速度 U、代表長さ L で無次元化すると

$$\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \boldsymbol{u}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \qquad \mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}$$

となる（ν は動粘性係数）。固体壁では**滑りなし条件** $\boldsymbol{u} = 0$（速度の接線成分も法線成分も 0）を課す。$\mathrm{Re}\to\infty$ で粘性項を落とすと Euler 方程式になる。粘性項 $\Delta\boldsymbol{u}$ は方程式の最高階（2 階）の微分であり、Euler 方程式は 1 階である。モデル問題と同じく、階数が下がると課せる境界条件が減る。Euler 方程式に課せるのは法線成分の条件 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0$（壁を通り抜けない）だけで、接線成分は壁に沿って滑ってよい。したがって Euler の解は滑りなし条件を満たせず、壁の近くに薄い層が必要になる。これが Prandtl（1904）の境界層の考え方である。

7.7.2 Prandtl 方程式のスケーリング導出

2 次元の定常流で、壁に沿って x、壁に垂直に y をとる。境界層の厚さを δ とし、層の中の速度と座標を次のように伸長する。

$$y = \delta Y, \qquad u = \mathcal{O}(1), \qquad v = \delta V.$$

v を δ 倍にとるのは連続の式 $u_x + v_y = 0$ で $u_x \sim 1$ と $v_y = V_Y$ を釣り合わせるためである。x 方向の運動方程式の各項の大きさは

$$\underbrace{uu_x}_{1} + \underbrace{vu_y}_{\delta V\cdot u_Y/\delta = 1} = -\underbrace{p_x}_{1} + \underbrace{\frac{1}{\mathrm{Re}}u_{xx}}_{\mathrm{Re}^{-1}} + \underbrace{\frac{1}{\mathrm{Re}}u_{yy}}_{(\mathrm{Re}\,\delta^2)^{-1}}$$

である。層の中で粘性が慣性と釣り合わなければ壁で速度を 0 に落とせない（落とせなければ層の意味がない）ので、主要釣り合いは $\mathrm{Re}\,\delta^2 = 1$、すなわち

$$\delta = \mathrm{Re}^{-1/2}$$

である。有次元に戻すと $\delta \sim \sqrt{\nu L/U}$ で、粘性による運動量の拡散距離 $\sqrt{\nu t}$ に、流体が長さ L を通過する時間 $t = L/U$ を入れたものになっている。y 方向の運動方程式では

$$\underbrace{uv_x + vv_y}_{\delta} = -\underbrace{p_y}_{\delta^{-1}p_Y} + \underbrace{\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v}_{\delta}$$

となり、δ を掛けると $p_Y = \mathcal{O}(\delta^2)$ を得る。つまり**圧力は層を横切って変わらず**、層の外の Euler 流の壁面での値 $p_e(x)$ で決まる。Euler 流の壁面での速度を $U_e(x)$ とすると Bernoulli の定理から $-p_e' = U_e U_e'$ である。まとめると

$$uu_x + Vu_Y = U_e U_e' + u_{YY}, \qquad u_x + V_Y = 0, \qquad u = V = 0\ (Y=0), \quad u \to U_e(x)\ (Y\to\infty) \tag{7.12}$$

が **Prandtl の境界層方程式**である。最後の条件 $u \to U_e$ が、内部解（境界層）と外部解（Euler 流）の接合条件に当たる。

Prandtl 方程式は Navier – Stokes から型が変わっている。u_{xx} が落ちたため、x 方向には 2 階微分がなく、方程式は x を「時間」とする放物型（熱方程式の仲間）になる。上流の速度分布を与えれば下流へ解き進められるという利点があり、同時に、x 方向に情報が逆流する状況（後述の剥離）を表現できないという限界も、この型の変化から来ている。

7.7.3 Blasius の相似解

一様流 $U_e = U$ の中に置いた平板（前縁 $x = 0$）では $U_e' = 0$ で、長さの尺度 L が問題から消える。そのため解は x と y の特定の組み合わせだけに依存する**相似解**になる（例題で導出する）。

$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}, \qquad \psi = \sqrt{\nu U x}\, f(\eta), \qquad u = \psi_y = U f'(\eta)$$

とおくと、Prandtl 方程式は Blasius 方程式

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0, \qquad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \tag{7.13}$$

になる。$f''(0)$ を未知数とする射撃法で数値的に解くと

$$f''(0) = 0.33206$$

を得る（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。速度が $0.99U$ に達する高さは $\eta \approx 4.91$ なので、境界層の厚さは

$$\delta_{99}(x) \approx 4.91\,\frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}, \qquad \mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$$

であり、前縁からの距離の平方根で厚くなる。壁の摩擦応力 $\tau_w = \mu u_y(0) = \mu U f''(0)\sqrt{U/(\nu x)}$ から局所摩擦係数 $C_f = 2\tau_w/(\rho U^2) = 0.664/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ も得られる。これらは層流の平板境界層の実験とよく合う。

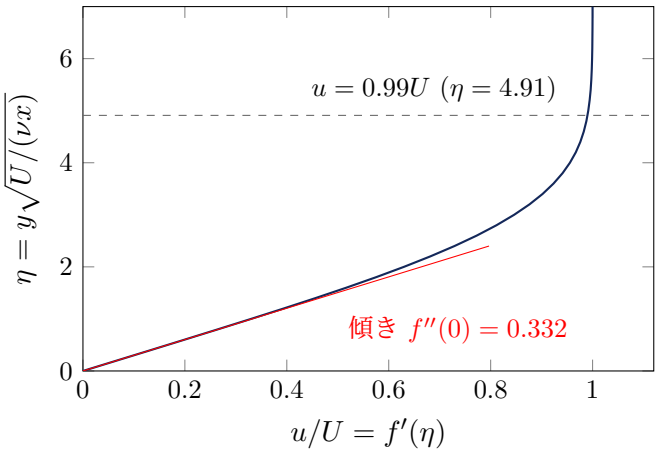


図 7.3　Blasius 速度分布（`scripts/gen_ch07.py` で数値積分）。壁での接線（赤）の傾きが壁の摩擦を決める。相似変数 η で見るとどの x でも同じ形で、有次元の厚さは $\sqrt{x}$ に比例して増える。

例題 7.7　Prandtl 方程式から Blasius 方程式へ　★★ 重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

有次元の平板境界層方程式 $u u_x + v u_y = \nu u_{yy}$、$u_x + v_y = 0$ を考える。

(1) 流れ関数 ψ（$u = \psi_y$、$v = -\psi_x$）を使うと連続の式が自動的に満たされることを確かめよ。

(2) $\eta = y\sqrt{U/(\nu x)}$、$\psi = \sqrt{\nu U x}\, f(\eta)$ のとき u、v を f で表せ。

(3) 方程式に代入して (7.13) を導け。

(4) 相似解が存在する理由を、問題に含まれる長さの尺度の観点から説明せよ。

解答. **(1)** $u_x + v_y = \psi_{yx} - \psi_{xy} = 0$。
(2) $\eta_y = \sqrt{U/(\nu x)}$、$\eta_x = -\eta/(2x)$ を使う。$u = \sqrt{\nu U x}\, f' \eta_y = U f'$。$v = -\partial_x\big(\sqrt{\nu U x} f\big) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}} f + \sqrt{\nu U x}\, f' \frac{\eta}{2x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\,(\eta f' - f)$。
(3) $u_x = U f'' \eta_x = -\frac{U\eta}{2x} f''$、$u_y = U f'' \sqrt{U/(\nu x)}$、$u_{yy} = U f''' U/(\nu x)$。代入すると

$$u u_x + v u_y = -\frac{U^2 \eta}{2x} f' f'' + \frac{U^2}{2x}(\eta f' - f) f'' = -\frac{U^2}{2x} f f'', \qquad \nu u_{yy} = \frac{U^2}{x} f'''.$$

$\eta f' f''$ の項が打ち消し合い、$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$ を得る（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。境界条件は、壁で $u = v = 0$ から $f'(0) = 0$ と $f(0) = 0$、層の外で $u \to U$ から $f'(\infty) = 1$。
(4) 半無限平板と一様流の問題には、外から与えられた長さの尺度がない（板の長さが無限）。ν と U から作れる長さは ν/U だけで、これは位置 x と組み合わせて $\mathrm{Re}_x = Ux/\nu$ にしかならない。各位置 x での層の厚さの尺度は $\sqrt{\nu x/U}$ だけであり、速度分布はこの尺度で測った y、すなわち η だけの関数になるしかない。偏微分方程式が常微分方程式に落ちるのはこの理由による。

7.7.4 剥離と Prandtl 方程式の破綻

外部流が下流で減速する（$U_e' < 0$、圧力が下流で上がる**逆圧力勾配**）と、層の底の遅い流体は圧力に押し戻される。壁の摩擦 $u_Y(x, 0)$ が減少して 0 になる点の先では、壁近くの流れが逆向きになり、境界層は壁から離れる（**剥離**）。定常の Prandtl 方程式では、剥離点に近づくと解が特異性をもつことが Goldstein によって示されており（Goldstein の特異性）、壁に垂直な速度 V が発散して「層は薄い」という前提そのものが崩れる。剥離の後ろでは逆流域・渦が生じ、外部流も Euler の付着流とは別物になるので、外部解・内部解の分担が成り立たない。物理的には、翼の失速や円柱の後流がこれに当たる。

非定常の Prandtl 方程式については、数学的にさらに強い困難が知られている。

- 初期の速度分布が壁から離れるにつれて単調に増える（$u_Y > 0$）場合には、Oleinik の仕事以来、局所的な解の存在と一意性が知られている。
- 初期値が解析関数の場合には、Sammartino と Caflisch が短時間の解の存在と、Navier – Stokes の解が Euler + Prandtl 層で近似されることを示した。
- 一般の（単調でない）滑らかな初期値については、Gérard-Varet と Dormy（2010）が、線形化した Prandtl 方程式が Sobolev 空間（関数とその導関数の 2 乗積分で滑らかさを測る関数空間）で**非適切**（ill-posed）であることを示した。x 方向の波数 k の摂動が $\mathrm{e}^{c\sqrt{k}\,t}$ の速さで増大し、波数が高いほど速く増えるので、初期値をわずかに変えただけで解が任意に大きく変わりうる。

適切性（well-posedness）とは、解が存在し、一意で、初期値に連続的に依存することをいう（第 2 章参照）。Prandtl 方程式が一般の初期値で非適切であることは、「境界層方程式を解けば境界層が分かる」という物理の手順が、単調な速度分布という条件の外では数学的に意味を持たないことを示している。

7.7.5 非粘性極限は未解決である

では、Prandtl の層を経由せずに、Navier – Stokes の解 $\boldsymbol{u}^\nu$ が $\nu \to 0$ で Euler の解 $\boldsymbol{u}$ に収束するかを直接問えるか。壁のない領域（全空間や周期境界）では、Euler の解が滑らかな時間範囲で収束が知られている。壁があり滑りなし条件を課す場合、一般の滑らかな初期値についての収束は**未解決**である。この問題について加藤敏夫（1984）は次の判定条件を与えた。

定理 7.6 (加藤の判定条件 ★★ 重要)**.** 有界領域 Ω で、*Euler* 方程式の滑らかな解 $\boldsymbol{u}$ が時間区間 $[0, T]$ で存在するとし、同じ初期値から出発した *Navier – Stokes* の解（滑りなし条件）を $\boldsymbol{u}^\nu$ とする。このとき $\sup_{0 \le t \le T} \|\boldsymbol{u}^\nu(t) - \boldsymbol{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \to 0$（運動エネルギーの意味の収束）となるため

の必要十分条件は

$$\nu \int_0^T \int_{\Gamma_{c\nu}} |\nabla \boldsymbol{u}^\nu|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t \;\longrightarrow\; 0 \qquad (\nu \to 0)$$

である。ここで $\Gamma_{c\nu}$ は境界から距離 $c\nu$ 以内の薄い領域（$c>0$ は定数）である。

左辺は、境界から距離 $c\nu$ という Prandtl 層（厚さ $\sqrt{\nu}$）よりはるかに薄い層での粘性によるエネルギー散逸である。加藤の定理は「非粘性極限が成り立つかどうかは、壁にごく近い層でエネルギーが散逸し続けるかどうかだけで決まる」ことを述べている。物理的には、乱流の境界層で壁近くの散逸が $\nu \to 0$ でも残る（抵抗が消えない）ことが知られており、その場合は Euler 解への収束が起こらないことと整合する。証明の要点は、Euler の解に境界の近く $c\nu$ の層だけで速度を 0 に落とす補正を加えた関数を作り、これとのエネルギー差を評価することにある（Prandtl 層を使わない点が要所である）。

7.8 Stokes 近似と潤滑近似

★★ 重要　低 Reynolds 数側の極限。正則に見えて遠方で特異になる例と、薄い領域の漸近極限

7.8.1 Stokes 近似と遠方での破綻

$\mathrm{Re} \to 0$ では慣性項が落ちて Stokes 方程式 $\nabla p = \mu\Delta \boldsymbol{u}$、$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ になる。最高階の項は残るので、物体の近くでは正則な極限に見える。半径 a の球が速さ U で動くときの抵抗 $F = 6\pi\mu a U$（Stokes の抵抗則）がこの近似の代表的な結果である。

ところが遠方では事情が変わる。Stokes 解の速度の乱れは r が大きいとき Ua/r のように減衰する（3 次元）。その位置での慣性項と粘性項の比を見積もると

$$\frac{|(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}|}{|\nu\Delta\boldsymbol{u}|} \sim \frac{U\cdot Ua/r^2}{\nu\, Ua/r^3} = \frac{Ur}{\nu} = \mathrm{Re}\,\frac{r}{a}$$

（$\mathrm{Re} = Ua/\nu$、ここで一様流 U が乱れを運ぶ項 $U\partial_x$ を慣性項の代表とした）となり、$r \sim a/\mathrm{Re}$ で慣性が粘性と同じ大きさになる。Stokes 近似は物体から a/Re より遠い領域では成り立たない。小パラメータが方程式の係数でなく「領域の大きさ」の側に現れる形の特異摂動である。

2 次元（円柱）ではこの破綻がより深刻になる。2 次元の Stokes 方程式の基本解は $\ln r$ のように増大するので、物体の上で $\boldsymbol{u}=0$、無限遠で一様流という二つの条件を同時に満たす Stokes 解が存在しない（**Stokes のパラドックス**）。3 次元では主要項は存在するが、次の次数の補正を Stokes 方程式の範囲で求めようとすると、遠方で増大する項が現れて無限遠の条件を満たせない（**Whitehead のパラドックス**）。どちらも、多重尺度法の永年項と同じく、ある変数（ここでは r）の大きい領域で展開が非一様になることの現れである。

解決は接合漸近展開による。遠方では一様流による移流 $U\partial_x\boldsymbol{u}$ だけを残した Oseen 方程式 $\rho U\partial_x\boldsymbol{u} = -\nabla p + \mu\Delta\boldsymbol{u}$ を外部方程式とし、物体の近くの Stokes 解を内部解として、二つを中間領域で接合する（Kaplun、Proudman と Pearson の仕事）。この手続きで、3 次元の球の抵抗は

$$F = 6\pi\mu a U\left(1 + \frac{3}{8}\mathrm{Re} + \cdots\right)$$

となる（第 2 項は Oseen の補正）。2 次元の円柱では、単位長さあたりの抵抗の主要項が $4\pi\mu U/\ln(1/\mathrm{Re})$ の形になり、Re の冪ではなく $1/\ln(1/\mathrm{Re})$ の冪で展開される。漸近列として ε^n でなく $(\ln\varepsilon)^{-n}$ を使わざるを得ない例であり、定義 7.2 で漸近列を一般の関数列にしておいた理由がここにある。

7.8.2 潤滑近似と Reynolds 方程式

軸受のように、隙間の厚さ H が長さ L に比べて小さい薄い領域の流れを考える。アスペクト比 $\varepsilon = H/L$ を小パラメータとし、下の面 $y=0$ が速さ U で x 方向に動き、上の面 $y=h(x)$ が静止していると

する。座標と速度を

$$x = L\tilde{x}, \quad y = \varepsilon L\tilde{y}, \quad u = U\tilde{u}, \quad v = \varepsilon U\tilde{v}, \quad p = \frac{\mu U L}{H^2}\tilde{p}$$

とスケールする（v の ε 倍は連続の式から、圧力の尺度は p_x と μu_{yy} の釣り合いから決まる）。Navier – Stokes の x 成分は

$$\varepsilon^2 \mathrm{Re}\,(\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{u}_{\tilde{y}}) = -\tilde{p}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} + \varepsilon^2 \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}$$

となり、y 成分からは $\tilde{p}_{\tilde{y}} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ が出る。修正 Reynolds 数 $\varepsilon^2\mathrm{Re}$ が小さければ、主要項は

$$\mu u_{yy} = p_x(x), \qquad p_y = 0$$

であり、x を固定するごとに y についての 2 階常微分方程式になる。$u(0) = U$、$u(h) = 0$ のもとで

$$u = \frac{p_x}{2\mu}(y^2 - yh) + U\Bigl(1 - \frac{y}{h}\Bigr), \qquad q = \int_0^h u\,\mathrm{d}y = -\frac{h^3}{12\mu}p_x + \frac{Uh}{2}$$

を得る（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。定常流では連続の式から流量 q が x によらないので、q の式を x で微分して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Bigl(h^3\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\Bigr) = 6\mu U\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{7.14}$$

が得られる。これが **Reynolds 方程式**で、2 次元の Navier – Stokes 方程式が、隙間の形 $h(x)$ だけを係数にもつ圧力の 1 次元の方程式に縮約される。動く面が流体を狭まる隙間へ引きずり込む（$h' < 0$ の向きに動く）と圧力が正になって荷重を支える（**くさび作用**）。たとえば隙間が 2 から 1 へ線形に狭まるパッドで両端の圧力を 0 とすると、中央の圧力は $\mu = U = L = 1$ の単位で 0.222 である（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。

潤滑近似は、薄い方向の変化を速い変数、長い方向の変化を遅い変数とみなし、速い変数については方程式を厳密に解いて（放物線の速度分布）、その平均量（流量）だけを遅い変数の方程式に渡す手続きである。これは平均化や BO と同じ「速い変数を解いて遅い変数の有効方程式を得る」構造で、第 9 章の均質化とも通じる。$\varepsilon \to 0$ で Navier – Stokes の解が Reynolds 方程式の解に収束することは数学的にも示されている。ただし隙間の端（軸受の出入口）や、隙間の形 $h(x)$ が急に変わる場所では、薄い領域の仮定が破れて別の内部層が必要になる。

例題 7.8　段付き軸受の圧力 ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

隙間が段になった軸受を考える。隙間は $0 < x < a$ で h_1、$a < x < L$ で h_2（$h_1 > h_2$）であり、下の面が速さ U で $+x$ 方向に動き、両端の圧力は $p(0) = p(L) = 0$ とする。

(1) 各区間で Reynolds 方程式 (7.14) から圧力が x の 1 次関数になることを示し、段の位置 $x = a$ の圧力 p_m を流量の連続から求めよ。

(2) $\mu = U = L = 1$、$h_1 = 2$、$h_2 = 1$、$a = 1/2$ のとき、p_m と単位幅あたりの荷重 $\int_0^L p\,\mathrm{d}x$ を求め、本文の線形に狭まるパッドと比べよ。

(3) 粘性率 $\mu = 0.05$ Pa s、密度 $\rho = 900$ kg/m^3 の油で $U = 5$ m/s、$L = 5$ cm、$h_2 = H = 25\ \mu$m とする。圧力の尺度 $\mu UL/H^2$ と修正 Reynolds 数 $\varepsilon^2\mathrm{Re}$（$\mathrm{Re} = \rho UL/\mu$、$\varepsilon = H/L$）を見積もり、潤滑近似が使えることと、薄い油膜が大きな荷重を支えられる理由を述べよ。

解答. **(1)** 各区間の内部では h が定数なので (7.14) の右辺は 0、左辺は h^3p'' で、$p'' = 0$ である。両端の条件と $x = a$ での圧力の連続から

$$p = p_m\frac{x}{a} \quad (0 < x < a), \qquad p = p_m\frac{L - x}{L - a} \quad (a < x < L).$$

流量 $q = -h^3p'/(12\mu) + Uh/2$ は段の両側で等しくなければならない（流体が段で湧いたり消え

たりしない）ので

$$-\frac{h_1^3}{12\mu}\frac{p_m}{a}+\frac{Uh_1}{2}=\frac{h_2^3}{12\mu}\frac{p_m}{L-a}+\frac{Uh_2}{2}\quad\Longrightarrow\quad p_m=\frac{6\mu U(h_1-h_2)}{h_1^3/a+h_2^3/(L-a)}.$$

$p_m>0$ となるのは $h_1>h_2$、すなわち動く面が流体を厚い側から薄い側へ引きずり込む向きのときであり、本文のくさび作用と同じ条件である。
(2) $p_m=6\cdot 1/(8/0.5+1/0.5)=1/3$、荷重は三角形の面積で $p_mL/2=1/6\approx 0.167$ である。同じ隙間の範囲（2 から 1）を線形に狭めたパッドでは、中央の圧力が 0.222、最大圧力が 0.250、荷重が 0.159 である（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。段付きの方が圧力の山が高く、荷重もわずかに大きい。隙間の形 $h(x)$ だけで荷重が決まるのは、Reynolds 方程式が h だけを係数にもつことの直接の帰結である。
(3) $\mu UL/H^2=0.05\cdot 5\cdot 0.05/(25\times 10^{-6})^2=2.0\times 10^7$ Pa である。(2) の無次元の値は x を L、h を H で測ったものなので、p_m は約 6.7 MPa になる。一方 $\mathrm{Re}=900\cdot 5\cdot 0.05/0.05=4500$ と大きいが、$\varepsilon=5\times 10^{-4}$ なので $\varepsilon^2\mathrm{Re}=1.1\times 10^{-3}\ll 1$ であり、慣性は無視できる。慣性が落ちるかどうかを決めるのは Re でなく ε^2Re であることがこの数値から分かる。壁の摩擦応力の尺度 $\mu U/H=10^4$ Pa に比べて、圧力の尺度は $L/H=2000$ 倍大きい。薄い隙間を長い距離にわたって流体を押し込むには大きな圧力勾配が要り、それが荷重を支える。

7.9 特異摂動の共通構造

★★★ 最重要 境界層・WKB・断熱定理・BO を一つの表で並べ、物理の直観の位置と破綻の場所を特定する

この章で扱った近似はすべて、次の 3 段の構造をもつ。

1. 小パラメータが方程式の最高階の項（あるいは最も速い過程）に掛かっていて、$\varepsilon=0$ で方程式の型が変わる。
2. その結果、解には二つの尺度が現れる。$\varepsilon=0$ の方程式で記述できる「外部」（遅い・広い）と、伸長変数で記述する「内部」（速い・薄い）である。
3. 外部と内部はそれぞれの方程式で解き、両者が重なる中間領域で接合して一つの近似にまとめる。

問題	小パラメータ	外部（遅い・広い）	内部（速い・薄い）	破綻する場所
モデル問題	ε（y'' の係数）	1 階方程式 $y'+y=0$	幅 ε の層、$Y''+Y'=0$	y' の係数が符号を変える点
多重尺度・平均化	ε（減衰・非線形）	振幅方程式（遅い時間 εt）	速い振動 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}t}$	時間 $\gg 1/\varepsilon$、共鳴
WKB	$\hbar^2$（ψ'' の係数）	古典軌道と位相 $\int p\,\mathrm{d}x/\hbar$	転回点の層（幅 $\hbar^{2/3}$）、Airy	転回点・低い量子数
断熱定理	ε（∂_t の係数）	瞬間ごとの固有状態	動的位相の速い回転	ギャップ $\to 0$（Landau – Zener）
Born – Oppenheimer	$\kappa^4=m_e/M$（$\Delta_{\boldsymbol{R}}$ の係数）	核の曲面上の運動	電子の固有値問題	円錐交差（$g\lesssim\kappa$）
Prandtl 境界層	Re^{-1}（$\Delta\boldsymbol{u}$ の係数）	Euler 流	幅 $\mathrm{Re}^{-1/2}$ の層	剥離・非単調な速度分布
Stokes ／ Oseen	Re	Oseen 流（$r\gtrsim a/\mathrm{Re}$）	Stokes 流（物体近傍）	2 次元で ln 型の展開
潤滑	$\varepsilon=H/L$	圧力の Reynolds 方程式	隙間方向の放物線分布	隙間の端・急な形状変化

表の「外部」と「内部」のどちらが物理屋の言う「遅いもの」「速いもの」に当たるかは問題によって入れ替わるが、共通しているのは、**速い（薄い）方を先に解いて、その結果を遅い（広い）方の方程式の係数やポテンシャルとして使う**という手続きである。BO では電子の固有値が核のポテンシャ

ルに、潤滑では隙間方向の流量が圧力の方程式に、平均化では速い位相の平均が振幅の方程式に、断熱定理では瞬間の固有値が動的位相になる。物理の直観「速いものと遅いものを分ける」は、数学的にはこの手続きと、それが接合条件で矛盾なく閉じることに対応する。

直観が明示しないのは、分離が成り立つための**一様性の条件**である。どの例でも、外部と内部の尺度の比が全域で大きいことが必要で、それが局所的に破れる場所で近似は破綻する。断熱定理と BO ではギャップが閉じる点、WKB では運動量が 0 になる転回点、境界層では壁の摩擦が 0 になる剥離点がそれに当たる。これらはいずれも「二つの尺度が同じ大きさになる」場所であり、そこでは新たな内部問題（Airy 関数、Landau – Zener 模型、剥離の局所解析）を立てて解き直すか、もはや二尺度の分離を使えないかのどちらかになる。さらに、破綻の影響が冪でなく $\exp(-c/\varepsilon)$ の形で現れる場合（Landau – Zener 遷移、トンネル現象、Stirling 級数の最適打ち切り誤差）は、漸近展開のどの次数にも現れないので、展開を高次まで進めても検出できない。

例題 7.9　両端に層ができる反応拡散方程式 ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

$0<\varepsilon\ll 1$ として、境界値問題

$$\varepsilon y''-y=-1,\qquad y(0)=y(1)=0$$

を考える。

(1) 上の表の 1 行（小パラメータ・外部・内部・破綻する場所）をこの問題について埋めよ。境界層の厚さは主要釣り合いで決めよ。

(2) 外部解・内部解を求め、合成解を作れ。

(3) 厳密解と比べて合成解の誤差を求め、モデル問題の誤差 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ と違う理由を述べよ。

解答. **(1)** $\varepsilon=0$ と置くと $y=1$ という代数方程式になり、境界条件を一つも課せない。端の近くで $X=x/\delta$ と伸長すると $(\varepsilon/\delta^2)Y''-Y=-1$ で、Y'' の項が他と釣り合うのは $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ のときである。1 階微分の項が無いので移流の向きが無く、層は両端にできる。表の行は、小パラメータが ε（y'' の係数）、外部が $y=1$、内部が幅 $\sqrt{\varepsilon}$ の層での $Y''-Y=-1$、破綻する場所は無し、となる。y の係数が区間の内部で 0 になる場合（$\varepsilon y''=q(x)y-1$ で q が符号を変える場合）は、WKB の転回点と同じ型の内部層が現れて別扱いになる。
(2) 外部解は $y_0=1$ である。左端では $Y''-Y=-1$、$Y(0)=0$ で有界な解は $Y=1-\mathrm{e}^{-X}$（$X=x/\sqrt{\varepsilon}$）で、$X\to\infty$ で外部解の値 1 に自動的に接合する。右端も同様に $\xi=(1-x)/\sqrt{\varepsilon}$ で $1-\mathrm{e}^{-\xi}$ である。外部解と二つの内部解を足し、二重に数えた共通部分 1 を 2 回引いて

$$y_c(x)=1-\mathrm{e}^{-x/\sqrt{\varepsilon}}-\mathrm{e}^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}.$$

(3) 厳密解は $y=1-\cosh\bigl((x-\tfrac12)/\sqrt{\varepsilon}\bigr)/\cosh\bigl(1/(2\sqrt{\varepsilon})\bigr)$ である。分子と分母に $\mathrm{e}^{-1/(2\sqrt{\varepsilon})}$ を掛けると、$r=\mathrm{e}^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$ として

$$y=1-\frac{\mathrm{e}^{-x/\sqrt{\varepsilon}}+\mathrm{e}^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}}{1+r},\qquad y-y_c=\bigl(\mathrm{e}^{-x/\sqrt{\varepsilon}}+\mathrm{e}^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}\bigr)\frac{r}{1+r}$$

となる。括弧の最大は端での $1+r$ なので $\sup|y-y_c|=r=\mathrm{e}^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$ であり、$\varepsilon=0.01$ で 4.5×10^{-5} である（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。誤差は ε のどの冪よりも小さい。
モデル問題では外部解 e^{1-x} に ε の補正（特性根 $\lambda_1=-1-\varepsilon+\cdots$ のずれ）があり、それが $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の誤差になった。この問題では外部解 $y=1$ が外部方程式をすべての次数で厳密に満たし、内部方程式も省いた項が無いので厳密である。残る誤差は、片方の層の裾がもう片方の端の境界条件をわずかに乱すことだけで、その大きさは層の裾の値 $\mathrm{e}^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$ になる。表の「破綻する場所」が無い問題でも、誤差が冪で出るか指数で出るかは外部解に補正が要るかどうかで決まる。

7.10 この章のまとめ

★★★ 最重要 特異摂動の手順と、その正当化の範囲

この章の要点

- 特異摂動は、小パラメータが最高階の微分に掛かり、$\varepsilon = 0$ で方程式の型（階数・課せる境界条件の数）が変わる問題である。解は一様には $\varepsilon = 0$ の解に近づかず、薄い層や長い時間に非一様性が現れる。
- 手順は、外部解（$\varepsilon = 0$ の方程式）、伸長変数と主要釣り合いで決める内部解、中間領域での接合、合成解の 4 段である。モデル問題では合成解の誤差が一様に $\mathcal{O}(\varepsilon)$（$\sup|y - y_c|/\varepsilon \to \mathrm{e}$）であることを厳密解で確かめた。境界層は移流の下流端にできる。
- 時間方向では、素朴展開は永年項で破綻し、遅い時間を独立変数にする多重尺度法（可解条件＝振幅方程式）や平均化定理が時間 $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ まで $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の精度を保証する。
- WKB は $\hbar^2$ を最高階の係数とする特異摂動で、転回点は幅 $\hbar^{2/3}$ の内部層であり、Airy 関数との接合が接続公式と Bohr – Sommerfeld 条件 $\oint p\,\mathrm{d}x = 2\pi\hbar(n + \frac{1}{2})$ を与える。
- 断熱定理はギャップ $g > 0$ のもとで $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の追随を保証し、遅さは $\varepsilon\|H'\| \ll g^2$ で測られる。ギャップが小さいと Landau – Zener 遷移 $\exp(-\pi\Delta^2/(2\hbar\alpha))$ が起こる。
- Born – Oppenheimer 近似は $\kappa = (m_e/M)^{1/4}$ を小パラメータとする特異摂動で、電子・振動・回転のエネルギー比 $1 : \kappa^2 : \kappa^4$ の階層がスケーリングから出る。非断熱結合は κ^3/g の大きさで、円錐交差（$g \lesssim \kappa$）で BO は破綻する。
- 流体の境界層は Re^{-1} を最高階の係数とする特異摂動で、Prandtl 方程式（厚さ $\mathrm{Re}^{-1/2}$）と Blasius 解（$f''(0) = 0.332$、$\delta_{99} = 4.91x/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$）を得る。剥離で破綻し、一般の初期値では Prandtl 方程式は非適切であり、壁のある非粘性極限は未解決である（加藤の判定条件）。

この章の近似はすべて第 1 章の分類の B 型（極限）である。数学が正当化したものを整理すると、モデル問題・多重尺度・平均化については「誤差が一様に $\mathcal{O}(\varepsilon)$」という収束の速さまで含めた完全な正当化を与えた。WKB と断熱定理は、ギャップ（あるいは転回点から離れていること）を仮定すれば同じ形の誤差評価が成り立ち、その仮定が破れる場所（転回点・ギャップの閉じる点）では内部問題の解を接合する形で近似を延長できる。Born – Oppenheimer 近似は κ についての漸近展開として、ギャップ条件が一様に成り立つ範囲で数学的に正当化されており、誤差の次数（エネルギーで κ^4 の対角補正、κ^6 の非断熱補正）もスケーリングから読み取れる。流体の境界層だけは事情が異なり、Prandtl 方程式そのものの適切性が単調な速度分布や解析的な初期値という条件の下でしか保証されず、Navier – Stokes の非粘性極限は一般には未解決である。物理で最もよく使われる近似の一つが、数学的には最も正当化の進んでいない近似でもあることは、第 10 章で全体を整理する際の重要な材料になる。

例題 7.10　身の回りの小さいパラメータ ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

この章の道具で、次の三つの場面の小さいパラメータを見積もり、近似の精度を確かめよ。

(1) 空気（動粘性率 $\nu = 1.5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$）が速さ $U = 10\ \mathrm{m/s}$ で平板に沿って流れる。前縁から $x = 1\ \mathrm{m}$ の位置で局所 Reynolds 数 Re_x と Blasius 解の境界層の厚さ $\delta_{99} = 4.91x/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ を求めよ。

(2) 振り子 $\theta'' + \sin\theta = 0$ を振幅 30° で振る。$\sin\theta \approx \theta - \theta^3/6$ として Duffing 振動子の例題の結果を使い、周期の伸びを求めよ。厳密な周期の比 $2K(\sin^2(\theta_0/2))/\pi$（$K$ は第 1 種完全楕

円積分）は 1.01741 である。

(3) 半径 $a = 1\ \mu$m の粒子が水（$\nu = 10^{-6}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$）の中を速さ $U = 1\ \mu\mathrm{m/s}$ で動く。Re と、Stokes 近似が成り立たなくなる距離 a/Re を求めよ。

解答. **(1)** $\mathrm{Re}_x = Ux/\nu = 10 \cdot 1/(1.5 \times 10^{-5}) = 6.7 \times 10^5$、$\delta_{99} = 4.91/\sqrt{6.7 \times 10^5}\ \mathrm{m} = 6.0\ \mathrm{mm}$ である（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。層の厚さと長さの比 6×10^{-3} は $\mathrm{Re}_x^{-1/2}$ の程度で、Prandtl のスケーリングの小さいパラメータである。この Reynolds 数は層流から乱流へ移る目安（5×10^5 程度）を越えているので、実際の平板ではこの位置で乱流境界層になっている可能性が高く、Blasius 解の値は層流を保った場合の見積もりである。
(2) $\theta'' + \theta - \frac{1}{6}\theta^3 = 0$ は Duffing 振動子で $\varepsilon = -\frac{1}{6}$ としたものなので、$\omega = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2 = 1 - a^2/16$ である。$a = \pi/6 = 0.5236$ で $\omega = 0.98287$、周期の比は $1/\omega = 1.01743$ で、厳密値 1.01741 との差は 2×10^{-5} である。振幅を倍にすると伸びは約 4 倍になる。軟らかいばね（$\varepsilon < 0$）なので振動数が下がり、大きく振るほど周期が長くなる。
(3) $\mathrm{Re} = Ua/\nu = 10^{-6} \cdot 10^{-6}/10^{-6} = 10^{-6}$、$a/\mathrm{Re} = 1$ m である。粒子の大きさの 10^6 倍離れた所まで Stokes 近似が成り立つので、微生物や微粒子の運動では Stokes 方程式で十分である。小さいパラメータは同じ Re でも、それが「方程式の係数」でなく「近似の成り立つ領域の広さ」として現れている点が、境界層の (1) と違う。

総合問題　遅い多様体へ緩和する系 ★★★ 最重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

$0 < \varepsilon \ll 1$ として、2 変数の線形系

$$\varepsilon\, u' = -u + v, \qquad v' = -u, \qquad u(0) = 0, \quad v(0) = 1 \qquad (t \geq 0)$$

を考える。u は v に向かって速く緩和する変数、v はゆっくり変わる変数である。

(1) $\varepsilon = 0$ と置くと何が起こるかを述べ、この近似が正則摂動か特異摂動か、また近似の 3 つの型のどれに当たるかを判定せよ。（使う道具：第 1 章 § 近似の 3 つの型、第 7 章 § 正則摂動と特異摂動）

(2) 係数行列の固有値と固有ベクトルを ε の 1 次まで求め、(u, v) 平面での解の軌道の形を述べよ。（使う道具：第 2 章 § 相空間と定性的解析）

(3) 外部解と、$\tau = t/\varepsilon$ を使った内部解（初期層）を主要項まで求め、接合して合成解 u_c、v_c を作れ。（使う道具：第 7 章 § 境界層のモデル問題を完全に解く）

(4) u を消去すると v がモデル問題 (7.1) と同じ方程式を満たすことを示し、厳密解から $\sup_{t\geq 0}|u - u_c|/\varepsilon$ と $\sup_{t\geq 0}|v - v_c|/\varepsilon$ の $\varepsilon \to 0$ での極限を求めよ。（使う道具：第 7 章 § 境界層のモデル問題を完全に解く の定理）

(5) 共通構造の表の 1 行をこの系について埋め、u の方程式の緩和の符号を逆（$\varepsilon u' = u - v$）にしたら近似がどうなるかを述べよ。（使う道具：第 7 章 § 特異摂動の共通構造、§ 境界層はどちらの端にできるか）

解答. **(1)** $\varepsilon = 0$ では第 1 式が $u = v$ という代数的な拘束になり、微分方程式は $v' = -v$ の 1 本だけになる。課せる初期条件は 1 つに減り、$u(0) = 0$ と $v(0) = 1$ を同時には満たせない。最高階（ここでは u の時間微分）に小さい係数が掛かっていて型が変わるので特異摂動であり、$\varepsilon \to 0$ の極限をとる近似なので第 1 章の分類では B 型（極限）である。
(2) 係数行列は $A = \begin{pmatrix} -1/\varepsilon & 1/\varepsilon \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ で、固有方程式は $\varepsilon\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ である。根は (7.2) と同

じ $\lambda_1 = -1 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$、$\lambda_2 = -1/\varepsilon + 1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ で、どちらも負なので原点は安定な結節点である。固有ベクトルは第 1 式から $v = (1+\varepsilon\lambda)u$ を満たし、λ_1 に対して $(1, 1-\varepsilon)$、λ_2 に対して $(1, \varepsilon)$ となる。遅い方向はほぼ対角線 $u = v$（遅い多様体）、速い方向はほぼ u 軸に平行である。初期点 $(0,1)$ から出た軌道は、まず時間 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ でほぼ水平に動いて対角線の近く $(1,1)$ に達し、その後は対角線に沿って時間 $\mathcal{O}(1)$ で原点へ向かう。

(3) 外部では $u = v$、$v' = -v$ から $v = C\mathrm{e}^{-t}$、$u = C\mathrm{e}^{-t}$ である。内部では $U(\tau) = u(\varepsilon\tau)$、$V(\tau) = v(\varepsilon\tau)$ として $\mathrm{d}U/\mathrm{d}\tau = -U + V$、$\mathrm{d}V/\mathrm{d}\tau = -\varepsilon U$ となり、主要項は $V_0 = 1$、$U_0 = 1 - \mathrm{e}^{-\tau}$ である。接合は $\lim_{\tau\to\infty} V_0 = \lim_{t\to 0} v$ から $C = 1$ で、このとき $\lim_{\tau\to\infty} U_0 = 1 = \lim_{t\to 0} u$ も自動的に成り立つ。合成解は外部解＋内部解− 共通部分 1 で

$$u_c = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}, \qquad v_c = \mathrm{e}^{-t}.$$

(4) 第 2 式から $u = -v'$、これを第 1 式に代入すると $-\varepsilon v'' = v' + v$、すなわち $\varepsilon v'' + v' + v = 0$ で、初期条件は $v(0) = 1$、$v'(0) = -u(0) = 0$ である。方程式はモデル問題と同じで、条件が境界値でなく初期値になっている。$q = \sqrt{1 - 4\varepsilon}$ として

$$v = \frac{\lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad u = -v' = \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{q}$$

である（$\lambda_1\lambda_2 = 1/\varepsilon$、$\lambda_2 - \lambda_1 = -q/\varepsilon$ を使った）。$1/q = 1 + 2\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$、$\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{-t}(1 - \varepsilon t + \cdots)$ なので、層の外では

$$u - u_c = \varepsilon\, \mathrm{e}^{-t}(2 - t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \qquad v - v_c = \varepsilon\, \mathrm{e}^{-t}(1 - t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

となる。$\mathrm{e}^{-t}(2-t)$ と $\mathrm{e}^{-t}(1-t)$ は $t \ge 0$ で $t = 0$ に最大値 2 と 1 をとる。$t = 0$ では厳密解も合成解も初期条件を満たすので差は 0 で、差が最大になるのは層の外縁であり、定理 7.3 と同じ理由で

$$\sup_{t\ge 0} |u - u_c|/\varepsilon \to 2, \qquad \sup_{t\ge 0} |v - v_c|/\varepsilon \to 1$$

となる。数値では $\varepsilon = 0.01$ で 1.87 と 0.93、$\varepsilon = 0.001$ で 1.98 と 0.99 である（検算 `scripts/verify_ch07.py`）。

(5) 小パラメータは ε（u' の係数）、外部は遅い多様体 $u = v$ の上の運動 $v' = -v$、内部は幅 ε の初期層での緩和 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}\tau = -U + 1$、破綻する場所は $t \ge 0$ の範囲には無い。$\varepsilon u' = u - v$ と符号を逆にすると、内部方程式は $\mathrm{d}U/\mathrm{d}\tau = U - 1$ で、初期層の解 $1 - \mathrm{e}^{\tau}$ は層の外へ向かって増大し、外部解に接合できない。遅い多様体は軌道を引き寄せずに突き放し、解は時間 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ で $\mathrm{e}^{t/\varepsilon}$ のように大きくなる。これは境界層を下流端でなく上流端に置こうとしたときと同じ状況であり、特異摂動の手順が使えるのは、速い変数が遅い多様体へ緩和する（内部解が層の外へ減衰する）場合に限られる。