第 8 章

Boltzmann 方程式から流体方程式へ

★★★ 最重要 流体近似の根元である Navier–Stokes 方程式そのものが、分子運動論からの B 型（極限）近似であることを示す章

木下の問いに出てくる「流体力学での近似」には二つの層がある。表面の層は、Navier–Stokes 方程式を解くときの近似（境界層・乱流モデル・圧縮性の無視など）である。その下にもう一つ層があり、Navier–Stokes 方程式自体が「分子の集まりを連続体とみなす」という近似の産物である。この章は下の層を扱う。分子の運動（Newton 力学）から Boltzmann 方程式を経て流体方程式に至る道筋を、各段で何を小さいとみなし、どういう極限を取り、その極限が数学的にどこまで正当化されているかという観点で追う。

結論を先に書いておく。流体方程式は小さいパラメータ（Knudsen 数）の極限で現れる有効方程式であり、第 1 章の分類では典型的な B 型の近似である。ただしその途中には、Boltzmann 方程式を導く段（分子的混沌の仮定）と、流体方程式を閉じる段（応力と熱流束を勾配で書く段）の二か所に「閉じる」操作が入っている。前者は極限定理（Lanford の定理）によって短時間だけ正当化され、後者は Hilbert 展開・Chapman–Enskog 展開によって小さい Knudsen 数での漸近展開として正当化される。さらに、導かれた Navier–Stokes 方程式そのものについて、3 次元で滑らかな解が時間大域的に存在するかどうかが分かっていない。近似の正当化の連鎖は、最後の環で数学の未解決問題につながっている。

8.1 階層の全体像と Hilbert の第 6 問題

★★★ 最重要 章全体の地図。どの矢印がどの極限で、どれが証明済みかを最初に押さえる

8.1.1 三つの記述と二つの極限

気体を記述する方法は、細かいほうから順に三つある。

1. **粒子の記述**。N 個の分子の位置 $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N$ と速度 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_N$ を Newton の運動方程式で追う。初期条件に確率分布を入れると、$6N$ 次元の位相空間上の確率密度 $F_N(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{v}_N)$ の時間発展は Liouville 方程式で書ける。これは厳密だが、$N \sim 10^{23}$ では扱えない。
2. **運動論的記述**。1 粒子の位置と速度の分布 $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$（6 次元の位相空間上の関数）だけを追う。これが Boltzmann 方程式の未知関数である。
3. **流体の記述**。各点での密度 $\rho(t, \boldsymbol{x})$、流速 $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$、温度 $T(t, \boldsymbol{x})$ だけを追う。3 次元空間上の 5 個の関数であり、Euler 方程式・Navier–Stokes 方程式の未知関数である。

1 から 2 へ移る段は、Liouville 方程式から 1 粒子分布の方程式を作る段であり、第 6 章で見た BBGKY 階層（k 粒子分布の方程式に $k+1$ 粒子分布が現れる連鎖）を途中で切る操作になる。ここで使う極限は **Boltzmann–Grad 極限**と呼ばれ、粒子数 $N \to \infty$、粒子の直径 $d \to 0$ を、Nd^2 が一定になるように取る（容器の体積は固定）。Nd^2 は 1 個の粒子が単位長さ進む間に出会う衝突の回数に比例するので、この極限では平均自由行程が一定に保たれる。一方で粒子の体積の総和 $Nd^3 \sim (Nd^2)\, d$ は 0 に行くので、気体は限りなく希薄になる。

2 から 3 へ移る段で使う小パラメータは **Knudsen 数**

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{L} \tag{8.1}$$

である。λ は平均自由行程（分子が衝突から次の衝突までに進む平均距離）、L は流れの巨視的な長さ（管の径、物体の大きさ、密度や温度が変化する距離）である。$\mathrm{Kn} \to 0$ は、巨視的な変化が起きる距離の中で分子が非常に多く衝突し、各点で局所的な熱平衡に達している状況を表す。

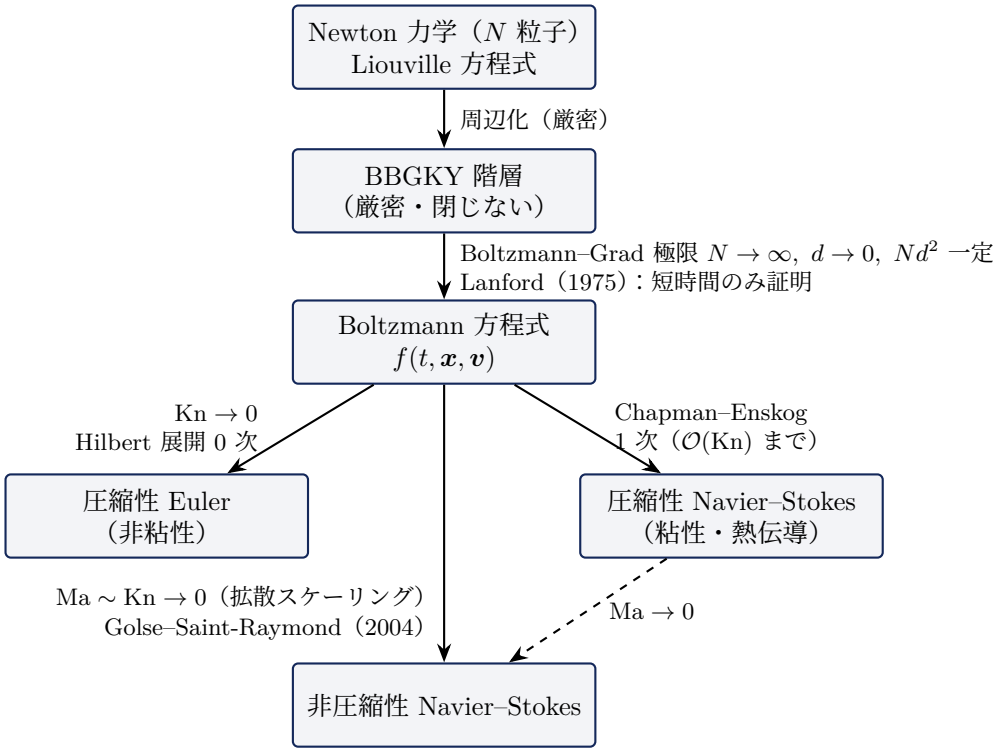


図 8.1　気体の記述の階層。実線は本章で扱う極限、破線は流体方程式の中での低 Mach 数極限。

8.1.2 Hilbert の第 6 問題

1900 年のパリの国際数学者会議で Hilbert が挙げた 23 の問題のうち、第 6 問題は「物理学の公理を数学的に扱うこと」である。その説明の中で Hilbert は、Boltzmann の気体論の仕事に触れ、原子論的な見方から連続体の運動法則へ至る極限過程を数学的に厳密に展開することを課題として挙げた。図 8.1 の上から下までの矢印を、すべて定理として結ぶことがこの課題の一つの読み方である。Hilbert 自身は 1912 年に Boltzmann 方程式を論じ、後で述べる Hilbert 展開を導入した。

矢印	小パラメータ	何を捨てるか	数学的な状況
Liouville → BBGKY	なし	何も捨てない（周辺化）	厳密な恒等式
BBGKY → Boltzmann	$d \to 0$（Nd^2 一定）	衝突前の 2 粒子相関（分子的混沌）	Lanford（1975）が平均自由時間の数分の 1 の時間まで証明。長時間は 2025 年のプレプリントが主張
Boltzmann → Euler	$\mathrm{Kn} \to 0$	局所平衡からのずれ	滑らかな Euler 解が存在する時間内で証明済み
Boltzmann → NS（圧縮性）	Kn の 1 次まで	$\mathcal{O}(\mathrm{Kn}^2)$ の項	漸近展開としての整合性。極限定理の形にはならない（後述）
Boltzmann → 非圧縮性 NS	$\mathrm{Ma} \sim \mathrm{Kn} \to 0$	圧縮性・非線形の高次	弱解の意味で証明済み（Golse–Saint-Raymond 2004）

表 8.1　階層の各矢印。詳細は本章の各節で述べる。

例題 8.1　Boltzmann–Grad 極限で何が小さくなるか ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

直径 d の剛体球が数密度 n で詰まった気体を考える。平均自由行程は $\lambda = 1/(\sqrt{2}\,n\pi d^2)$、球が占める体積の割合（体積分率）は $\phi = n \cdot \frac{\pi}{6} d^3$ である。

1. $\phi = \dfrac{d}{6\sqrt{2}\,\lambda}$ を示し、Boltzmann–Grad 極限（λ を固定して $d \to 0$）で $\phi \to 0$ となることを確かめよ。
2. 20 °C、1 気圧の空気（$n \approx 2.50 \times 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$、$d = 0.37\,\mathrm{nm}$）について ϕ と λ/d を求めよ。
3. 液体の水（数密度 $n \approx 3.34 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$、分子の有効直径 $d \approx 0.28\,\mathrm{nm}$ とする）について同じ量を求め、Boltzmann 方程式が使えるかどうかを判断せよ。

解答. **(1)** λ の式から $n\pi d^2 = 1/(\sqrt{2}\lambda)$ なので

$$\phi = \frac{\pi}{6} n d^3 = \frac{d}{6}\, n\pi d^2 = \frac{d}{6\sqrt{2}\,\lambda}.$$

λ を固定すれば ϕ は d に比例して 0 に行く。平均自由行程（衝突の頻度）を保ったまま、粒子が占める体積を消していく極限であり、これが「希薄」の意味である。
(2) $\lambda = 1/(1.414 \times 2.50 \times 10^{25} \times \pi \times (0.37 \times 10^{-9})^2) \approx 6.6 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}$ なので $\lambda/d \approx 1.8 \times 10^{2}$、$\phi = 0.37/(6 \times 1.414 \times 66) \approx 6.6 \times 10^{-4}$。空間の 0.07% ほどしか分子が占めておらず、分子は自分の直径の約 180 倍の距離を進んでから次の分子に当たる。2 個の分子がちょうど衝突している瞬間に第 3 の分子が近くにいる確率は ϕ 程度なので、3 体衝突は無視でき、衝突は 2 体の独立な出来事として扱える。
(3) $\lambda = 1/(1.414 \times 3.34 \times 10^{28} \times \pi \times (0.28 \times 10^{-9})^2) \approx 8.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$ で、$\lambda/d \approx 0.31$ と直径より短い。$\phi \approx 0.38$ で、空間の 4 割近くを分子が占める。分子は常に複数の隣の分子と接していて、「自由に飛んでまれに 2 体で衝突する」という Boltzmann 方程式の前提が成り立たない。表 8.1 の BBGKY から Boltzmann への矢印は液体には使えず、液体の流体方程式（粘性率など）は運動論とは別の方法で求める必要がある（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。

8.2　Boltzmann 方程式

★★★ 最重要　流体方程式の出発点。衝突不変量と H 定理が、後の Hilbert 展開の可解条件と局所平衡の正体になる

8.2.1　分布関数と自由流

$f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ を、時刻 t に位置 $\boldsymbol{x}$ の近くの体積 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ にいて速度が $\boldsymbol{v}$ の近くの $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ にある分子の個数（の期待値）とする。数密度は $n(t,\boldsymbol{x}) = \int f\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ である。

衝突がなければ、各分子は等速直線運動をするので、f は特性線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}t$ に沿って一定であり、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f = 0 \tag{8.2}$$

を満たす。これを自由流（自由輸送）の方程式という。Boltzmann 方程式は、この右辺に衝突による変化率 $Q(f,f)$ を置いたものである。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f = Q(f,f). \tag{8.3}$$

8.2.2 剛体球の衝突則と衝突演算子

直径 d、質量 m の剛体球（なめらかな硬い球）を考える。速度 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_*$ の 2 球が接触したとき、中心を結ぶ方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{\omega} \in S^2$ とすると、弾性衝突の後の速度は

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \big((\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)\cdot\boldsymbol{\omega}\big)\boldsymbol{\omega}, \qquad \boldsymbol{v}_*' = \boldsymbol{v}_* + \big((\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)\cdot\boldsymbol{\omega}\big)\boldsymbol{\omega} \tag{8.4}$$

である。接触面に垂直な速度成分だけが入れ替わり、接線成分は変わらない。この写像について次の性質が成り立つ（例題 8.2 で確かめる。検算 `scripts/verify_ch08.py`）。

- 運動量とエネルギーを保存する：$\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_*' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_*$、$|\boldsymbol{v}'|^2 + |\boldsymbol{v}_*'|^2 = |\boldsymbol{v}|^2 + |\boldsymbol{v}_*|^2$。
- 対合である：$(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}_*')$ に同じ $\boldsymbol{\omega}$ で式 (8.4) を施すと $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_*)$ に戻る。
- $\boldsymbol{\omega}$ を固定すると $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_*) \mapsto (\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}_*')$ は $\mathbb{R}^6$ の線型写像で、行列式の絶対値は 1（体積を保つ）。
- $|(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}_*')\cdot\boldsymbol{\omega}| = |(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)\cdot\boldsymbol{\omega}|$。

剛体球の衝突演算子は

$$Q(f,f)(\boldsymbol{v}) = \frac{d^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{S^2}\big[f(\boldsymbol{v}')f(\boldsymbol{v}_*') - f(\boldsymbol{v})f(\boldsymbol{v}_*)\big]\,|(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)\cdot\boldsymbol{\omega}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_* \tag{8.5}$$

である（$t, \boldsymbol{x}$ は全項共通なので省いた）。第 2 項（損失項）は「速度 $\boldsymbol{v}$ の分子が衝突して別の速度へ移る率」、第 1 項（獲得項）は「衝突によって速度 $\boldsymbol{v}$ に移ってくる率」を表す。

損失項の係数の意味を確かめておく。$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_*$ とすると $\int_{S^2}|\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\omega}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 2\pi|\boldsymbol{g}|$（$\boldsymbol{g}$ を z 軸に取って極座標で積分する。検算 `scripts/verify_ch08.py`）なので、損失項は

$$f(\boldsymbol{v})\int_{\mathbb{R}^3}\pi d^2\,|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*|\,f(\boldsymbol{v}_*)\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_* \tag{8.6}$$

になる。πd^2 は剛体球の全断面積（中心どうしが距離 d 以内に入る円板の面積）であり、$\pi d^2|\boldsymbol{g}|\,\mathrm{d}t$ は相対速度 $\boldsymbol{g}$ で動く相手を時間 $\mathrm{d}t$ の間に捕まえる円柱の体積である。したがって損失項は「その円柱に入る相手の個数」を数えている。

積の形は仮定である

式 (8.5) では、位置 $\boldsymbol{x}$ で速度 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}_*$ の 2 分子が同時に見つかる確率密度を、積 $f(\boldsymbol{v})f(\boldsymbol{v}_*)$ で置き換えている。正しくは 2 粒子分布 $f^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_*)$ が入るべき場所である。積で置き換える仮定を**分子的混沌**（ドイツ語で Stosszahlansatz、「衝突数の仮定」）という。これは衝突する直前の 2 分子の速度が独立であるという仮定であり、衝突した直後の 2 分子については成り立たない（衝突直後の速度は式 (8.4) で結び付いている）。この非対称性が 8.3 節で述べる不可逆性の起源になる。

8.2.3 衝突の対称性と弱形式

Q の性質はすべて、次の積分の書き換えから出てくる。以下、f は十分速く減衰する滑らかな正の関数とし、$\phi(\boldsymbol{v})$ は多項式程度の増大しかしない連続関数とする。$f' = f(\boldsymbol{v}')$、$f_* = f(\boldsymbol{v}_*)$、$f_*' = f(\boldsymbol{v}_*')$、$\phi'$ なども同様に略記する。

補題 8.1 (衝突演算子の弱形式)**.**

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)\,\phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{d^2}{8}\iiint \big(f'f_*' - ff_*\big)\big(\phi+\phi_*-\phi'-\phi_*'\big)|(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)\cdot\boldsymbol{\omega}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_*\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{8.7}$$

証明. 左辺を $I = \frac{d^2}{2}\iiint(f'f_*' - ff_*)\,\phi\,B\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_*\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ と書く（$B = |(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)\cdot\boldsymbol{\omega}|$）。
第一に、積分変数 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}_*$ の名前を入れ替える。式 (8.4) は $\boldsymbol{v} \leftrightarrow \boldsymbol{v}_*$ で $\boldsymbol{v}' \leftrightarrow \boldsymbol{v}_*'$ と入れ替わるだけであり、B

も $f'f'_* - ff_*$ も対称なので、I は ϕ を ϕ_* に置き換えた式に等しい。両者の平均を取ると、ϕ が $\frac{1}{2}(\phi+\phi_*)$ に置き換わる。
第二に、$\boldsymbol{\omega}$ を固定して $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_*)\mapsto(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{v}'_*)$ と変数変換する。この写像は対合で体積を保ち、B を保つ。新しい変数で見ると $f'f'_*$ と ff_* の役割が入れ替わり、ϕ,ϕ_* が ϕ',ϕ'_* になるので、I は $\frac{d^2}{2}\iiint(ff_*-f'f'_*)\frac{1}{2}(\phi'+\phi'_*)\,B$ にも等しい。
二つの表示の平均を取れば、$I=\frac{d^2}{2}\cdot\frac{1}{4}\iiint(f'f'_*-ff_*)(\phi+\phi_*-\phi'-\phi'_*)B$ となり、式 (8.7) を得る。 □

8.2.4 衝突不変量

定義 8.2 (衝突不変量)**.** 連続関数 $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ が、すべての $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_*\in\mathbb{R}^3$ と $\boldsymbol{\omega}\in S^2$ について

$$\phi(\boldsymbol{v}')+\phi(\boldsymbol{v}'_*)=\phi(\boldsymbol{v})+\phi(\boldsymbol{v}_*) \tag{8.8}$$

を満たすとき、ϕ を**衝突不変量**という。2 分子の衝突の前後で和が変わらない 1 分子量のことである。

補題 8.1 から、ϕ が衝突不変量ならば、どんな f に対しても $\int Q(f,f)\phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}=0$ である。運動量とエネルギーの保存から、1、v_1,v_2,v_3、$|\boldsymbol{v}|^2$ の 5 個とその線型結合は衝突不変量である。逆に、衝突不変量はこれで尽きる。

定理 8.3 (衝突不変量の決定 ★★★ 最重要)**.** $\phi\in C^1(\mathbb{R}^3)$ が衝突不変量であることと、定数 $a,c\in\mathbb{R}$、$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ によって

$$\phi(\boldsymbol{v})=a+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+c|\boldsymbol{v}|^2 \tag{8.9}$$

と書けることは同値である。

証明. $\Leftarrow$ は運動量とエネルギーの保存から直ちに従う。$\Rightarrow$ を示す。
(i) 球面上で一定であること。 2 分子の全運動量 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_*$ と全エネルギー $E=|\boldsymbol{v}|^2+|\boldsymbol{v}_*|^2$ を固定すると、$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{P}/2+r\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{v}_*=\boldsymbol{P}/2-r\boldsymbol{e}$（$r=|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*|/2$ は E と $\boldsymbol{P}$ で決まり、$\boldsymbol{e}$ は単位ベクトル）と書ける。式 (8.4) の $\boldsymbol{\omega}$ をいろいろに選ぶと、衝突後の相対速度の向き $\boldsymbol{e}'$ は単位球面全体を動く（$\boldsymbol{e}'$ は $\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{\omega}$ に垂直な平面で鏡映したものであり、$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{e}'$ の 2 等分方向に垂直な $\boldsymbol{\omega}$ を取れば任意の $\boldsymbol{e}'$ に届く）。したがって衝突不変性 (8.8) は、任意の中心 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ と半径 $r>0$ について

$$g(\boldsymbol{e}):=\phi(\boldsymbol{a}+r\boldsymbol{e})+\phi(\boldsymbol{a}-r\boldsymbol{e})\quad\text{が }\boldsymbol{e}\in S^2\text{ によらない} \tag{8.10}$$

ことと同じである。
(ii) 勾配の差が位置の差に平行であること。 g を球面に沿って微分すると 0 である。$\boldsymbol{e}$ に垂直な任意の $\boldsymbol{t}$ について

$$\boldsymbol{t}\cdot\big(\nabla\phi(\boldsymbol{a}+r\boldsymbol{e})-\nabla\phi(\boldsymbol{a}-r\boldsymbol{e})\big)=0. \tag{8.11}$$

任意の 2 点 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ について $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})/2$、$r\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})/2$ と置けば、$\boldsymbol{G}:=\nabla\phi$ について「$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ に垂直なすべてのベクトルと直交する」、すなわち

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{8.12}$$

となる実数 $\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ がある。
(iii) λ は定数であること。 同一直線上にない 3 点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ を取る。式 (8.12) を 3 辺について足すと左辺は 0 になり、$\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}=-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})$ を使うと

$$\big(\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\lambda(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\big)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\big(\lambda(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})-\lambda(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\big)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})=\boldsymbol{0}. \tag{8.13}$$

$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$ は線型独立なので、3 辺の λ は等しい。任意の 2 組の点の対は、3 次元では同一直線上にない三角形をいくつかつないで結べるので、λ は全体で一つの定数である。これを $2c$ と書くと $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=2c\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{0})$）。
(iv) 積分する。 $\nabla\phi=2c\boldsymbol{v}+\boldsymbol{b}$ を積分して $\phi=a+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+c|\boldsymbol{v}|^2$。 □

注意

C^1 の仮定は証明を短くするためのもので、ϕ が連続であるだけ、さらには可測であるだけでも同じ結論が成り立つことが知られている。後の H 定理で $\phi = \ln f$ に適用するので、f の正則性をどこまで仮定するかがこの定理の適用範囲を決める。

8.2.5 H 定理と Maxwell 分布

定理 8.4 (H 定理 ★★★ 最重要)**.** $f > 0$ を *Boltzmann* 方程式 (8.3) の滑らかで十分速く減衰する解とし、空間は周期的な箱（または鏡面反射の壁で囲まれた容器）とする。

$$H(t) = \iint f \ln f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} \tag{8.14}$$

は時間について単調非増加である。さらに、$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$ となるのは、各点 $\boldsymbol{x}$ で f が速度について *Maxwell* 分布

$$M_{n,\boldsymbol{u},T}(\boldsymbol{v}) = n\Big(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T}\Big)^{3/2} \exp\Big(-\frac{m|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^2}{2k_{\mathrm{B}}T}\Big) \tag{8.15}$$

（$n, \boldsymbol{u}, T$ は $\boldsymbol{x}$ に依存してよい）であるときに限る。

証明. $\partial_t(f\ln f) = (1+\ln f)\partial_t f$ と Boltzmann 方程式から

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\iint (1+\ln f)\,\boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \iint (1+\ln f)\,Q(f,f)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{8.16}$$

第 1 項は $\boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}(f\ln f)$ の $\boldsymbol{x}$ についての積分なので、周期境界では 0 になる（鏡面反射の壁では、壁で $\boldsymbol{v}$ と反転速度の流束が打ち消し合って 0 になる）。第 2 項では 1 が衝突不変量なので $\int Q\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = 0$ であり、補題 8.1 を $\phi = \ln f$ で使うと

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{d^2}{8}\iiiint (f'f'_* - ff_*)\ln\frac{ff_*}{f'f'_*}\,|(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)\cdot\boldsymbol{\omega}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_*\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{8.17}$$

正の数 A, B について $(A-B)\ln(B/A) \le 0$ であり、等号は $A = B$ のときに限る（ln が単調増加なので $A-B$ と $\ln(B/A)$ は逆符号）。したがって被積分関数は非正で、$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \le 0$。
等号が成り立つのは、ほとんどすべての $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_*, \boldsymbol{\omega})$ で $f'f'_* = ff_*$、すなわち $\ln f' + \ln f'_* = \ln f + \ln f_*$ のときである（被積分関数が連続なので、すべての点で成り立つ）。これは $\ln f$ が衝突不変量であることを意味するので、定理 8.3 より $\ln f = a + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v} + c|\boldsymbol{v}|^2$。$f$ が $\boldsymbol{v}$ について積分可能であるためには $c < 0$ が必要で、平方完成すれば式 (8.15) の形になる。逆に Maxwell 分布なら $\ln f$ は衝突不変量なので $f'f'_* = ff_*$ となり、$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ の被積分関数は 0 である。 □

系 8.5 (衝突演算子の零点)**.** $f > 0$ が滑らかで十分速く減衰するとき、$Q(f,f) = 0$ であることと、f が *Maxwell* 分布であることは同値である。

証明. $Q(f,f) = 0$ ならば $\int Q(f,f)\ln f\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = 0$ なので、上の証明の後半と同じ議論で f は Maxwell 分布である。逆に Maxwell 分布なら $f'f'_* = ff_*$ なので、式 (8.5) の被積分関数が恒等的に 0 になる（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。 □

H が測るもの

$-k_{\mathrm{B}}H$ は、1 粒子分布 f だけから計算したエントロピー（Boltzmann のエントロピー）である。エネルギーと運動量と粒子数を固定したとき、H を最小にする分布が Maxwell 分布である（例題 8.3）。H 定理は「衝突は H を減らし、減らせなくなった状態が局所平衡である」と言っている。後の Hilbert 展開で、最低次の解が局所 Maxwell 分布になることは、この定理を局所的に使ったものである。

例題 8.2　衝突則と衝突不変量 ★★★ 最重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

剛体球の衝突則 (8.4) について次を示せ。

1. 運動量とエネルギーが保存されること。
2. 衝突則が対合であること（同じ $\boldsymbol{\omega}$ で 2 回施すと元に戻ること）。
3. $\phi(\boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{v}|^4$ は衝突不変量でないこと。具体的な衝突を 1 つ挙げよ。

解答. $\alpha = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_*)\cdot\boldsymbol{\omega}$ と置く。
(1) $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_*' = \boldsymbol{v} - \alpha\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{v}_* + \alpha\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_*$。エネルギーは

$$|\boldsymbol{v}'|^2 + |\boldsymbol{v}_*'|^2 = |\boldsymbol{v}|^2 - 2\alpha\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega} + \alpha^2 + |\boldsymbol{v}_*|^2 + 2\alpha\,\boldsymbol{v}_*\cdot\boldsymbol{\omega} + \alpha^2 = |\boldsymbol{v}|^2 + |\boldsymbol{v}_*|^2 - 2\alpha^2 + 2\alpha^2.$$

ここで $-2\alpha(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)\cdot\boldsymbol{\omega} = -2\alpha^2$ を使った。
(2) 衝突後の相対速度の $\boldsymbol{\omega}$ 成分は $(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}_*')\cdot\boldsymbol{\omega} = \alpha - 2\alpha = -\alpha$。もう一度衝突則を施すと $\boldsymbol{v}'' = \boldsymbol{v}' - (-\alpha)\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v} - \alpha\boldsymbol{\omega} + \alpha\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v}$、同様に $\boldsymbol{v}_*'' = \boldsymbol{v}_*$。
(3) $\boldsymbol{v} = (1,0,0)$、$\boldsymbol{v}_* = (0,1,0)$、$\boldsymbol{\omega} = (1,0,0)$ とする。$\alpha = 1$ なので $\boldsymbol{v}' = (0,0,0)$、$\boldsymbol{v}_*' = (1,1,0)$。衝突前は $|\boldsymbol{v}|^4 + |\boldsymbol{v}_*|^4 = 1 + 1 = 2$、衝突後は $0 + (\sqrt{2})^4 = 4$ で一致しない。衝突は運動エネルギーの和を保つが、エネルギーの 2 乗の和は保たない。

例題 8.3　Maxwell 分布は H の最小点 ★★★ 最重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

$\boldsymbol{x}$ を 1 点に固定し、速度分布 $f(\boldsymbol{v}) > 0$ を考える。

1. Maxwell 分布 (8.15) が $f(\boldsymbol{v})f(\boldsymbol{v}_*) = f(\boldsymbol{v}')f(\boldsymbol{v}_*')$ を満たすことを示せ。
2. f と Maxwell 分布 $M = M_{n,\boldsymbol{u},T}$ が同じ $\int f$、$\int \boldsymbol{v} f$、$\int |\boldsymbol{v}|^2 f$ を持つとき、$\int f\ln f\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} \geq \int M\ln M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ であり、等号は $f = M$ に限ることを示せ。

解答. **(1)** $\ln M =$ 定数 $- \frac{m}{2k_{\mathrm{B}}T}\bigl(|\boldsymbol{v}|^2 - 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + |\boldsymbol{u}|^2\bigr)$ は $1, \boldsymbol{v}, |\boldsymbol{v}|^2$ の線型結合なので衝突不変量であり、$\ln M + \ln M_* = \ln M' + \ln M_*'$。指数を取れば主張を得る。
(2) $\ln M = a + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v} + c|\boldsymbol{v}|^2$ なので、$\int f\ln M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ は f の 3 種のモーメントだけで決まり、仮定から $\int f\ln M = \int M\ln M$。したがって

$$\int f\ln f - \int M\ln M = \int f\ln\frac{f}{M}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int M\left(\frac{f}{M}\ln\frac{f}{M} - \frac{f}{M} + 1\right)\mathrm{d}\boldsymbol{v}.$$

最後の等号では $\int(f - M)\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = 0$ を足した。$s\ln s - s + 1 \geq 0$（$s > 0$）で等号は $s = 1$ に限る（$s = 1$ で最小値 0 を取る凸関数）ので、右辺は非負であり、0 になるのは $f = M$ のときに限る。

8.2.6　分子的混沌と平均場の閉じ方

第 6 章の平均場極限では、BBGKY 階層の 2 粒子分布を $f^{(2)} \approx f \otimes f$（1 粒子分布の積）で置き換えて、Vlasov 方程式や Hartree 方程式を得た。分子的混沌の仮定も同じく「2 粒子分布を積で置き換える」操作であり、多体の相関を捨てて 1 体の方程式を閉じるという点で同類である。

違いは相互作用の強さと頻度にある。平均場極限では、相互作用は弱く（強さ $1/N$）、1 個の粒子は常に全員から少しずつ力を受ける。Boltzmann–Grad 極限では、相互作用は強い（剛体球の衝突は速度を有限に変える）が、まれにしか起きない（衝突相手に出会う確率が d^2 に比例して小さい）。平均場では相関が $1/N$ の重みで薄まるので積の近似が自然に出てくるが、Boltzmann–Grad 極限では

衝突した 2 粒子の間に有限の相関が生じる。それでも積の近似が成り立つのは、衝突した 2 粒子が再び出会う確率（再衝突の確率）が極限で 0 になり、生じた相関がその後の衝突に影響しないからである。この「再衝突の無視」が、次節の Lanford の定理で数学的に処理すべき中心の論点になる。

8.3 Lanford の定理と不可逆性

★★ 重要 Boltzmann 方程式が B 型の極限として導けること、ただし短時間に限ることを主張として押さえる

8.3.1 主張

剛体球系の BBGKY 階層は、k 粒子周辺分布 $f_N^{(k)}$ の方程式が、第 $k+1$ 粒子との衝突を表す項 $C_{k,k+1} f_N^{(k+1)}$ を通して $f_N^{(k+1)}$ を含む連鎖である。Boltzmann–Grad 極限で衝突項の係数 $(N-k)d^2$ は一定値に収束し、形式的には極限で Boltzmann 階層と呼ばれる連鎖が残る。Boltzmann 階層は、各 k について $f^{(k)} = f^{\otimes k}$（f の k 重の積）と置くと、f が Boltzmann 方程式を満たすことと同値になる。

定理 8.6 (Lanford の定理（1975） ★★ 重要)**.** $f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ を周期的な箱（または $\mathbb{R}^3$）上の連続な確率密度で、ある $C,\beta>0$ について $f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) \le C\mathrm{e}^{-\beta|\boldsymbol{v}|^2}$ を満たすものとする。直径 d の剛体球 N 個の初期分布を $f_0^{\otimes N}$（球どうしが重ならない配置に制限して規格化したもの）とする。このとき C,β だけで決まる $t_*>0$ があって、$0 \le t < t_*$ では、*Boltzmann–Grad* 極限（$N\to\infty$、$d\to 0$、Nd^2 一定）で

$$f_N^{(1)}(t) \to f(t), \qquad f_N^{(k)}(t) \to f(t)^{\otimes k} \quad (k\ge 2) \tag{8.18}$$

が成り立つ（収束は相空間の測度 0 の集合を除いた各点で）。ここで f は f_0 を初期値とする *Boltzmann* 方程式の解である。

2 番目の主張を**カオスの伝播**という。初期時刻に積の形（独立）だった分布が、時刻 t でも極限では積の形にとどまる。分子的混沌の仮定は、この意味で仮定でなく定理の帰結になる。t_* の大きさは平均自由時間の数分の 1 程度であり、気体の中の分子がおおむね 1 回も衝突しない程度の時間しかカバーしない。

8.3.2 証明の骨格と難所

証明は次の 3 段からなる。

1. **級数展開**。BBGKY 階層を Duhamel の公式（線型方程式の定数変化法の公式。$\dot f = Af + g$ の解を $f(t) = \mathrm{e}^{tA}f(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} g(s)\,\mathrm{d}s$ と書く）で積分形に直し、反復代入すると、$f_N^{(1)}(t)$ は「時刻 0 から t までの間に j 回の衝突で新しい粒子が加わる」項の和 $\sum_{j\ge 0}(\cdots)$ に展開される。Boltzmann 階層についても同じ形の級数がある。

2. **級数の一様収束**。第 j 項を絶対値で評価すると、衝突演算子 $C_{k,k+1}$ が速度 $|\boldsymbol{v}|$ の重みを 1 つ増やす（失う）ため、毎回 Gauss の重み $\mathrm{e}^{-\beta|\boldsymbol{v}|^2}$ の β を少しずつ削りながら評価することになり、第 j 項はおよそ $(Ct)^j$ で抑えられる。$t < t_* = 1/C$ なら級数は N によらず一様に収束する。

3. **項ごとの収束**。各項は、新しい粒子が加わっていく「衝突の木」に沿った軌道の積分である。粒子系の軌道と Boltzmann 階層の軌道が食い違うのは、すでに衝突した粒子どうしが再び衝突する（再衝突）か、加わった粒子が初期時刻に既存の粒子と重なる場合に限られ、そのような配置の測度は $d\to 0$ で 0 になることを示す。

難所は第 2 段である。第 2 段の評価は獲得項と損失項を別々に絶対値で抑えており、両者の打ち消し合いや、保存則・H 定理のような構造をまったく使っていない。このため評価は時間とともに幾何級数的に悪化し、短時間を越えられない。Boltzmann 方程式自体の解は長時間存在する場合でも、

この方法では導出の時間を延ばせない。第 3 段の再衝突の評価は技術的に長いが、短時間に限れば測度論的な評価で処理できる。

長時間への延長

2024 年から 2025 年にかけて、Deng・Hani・Ma が arXiv に公開した一連のプレプリントは、級数の項を組合せ論的に組み替えて打ち消し合いを取り込むことで、Boltzmann 方程式の解が存在する限りの長時間にわたって剛体球系から Boltzmann 方程式を導出し、さらに既知の流体力学極限と接続して流体方程式まで到達したと主張している。本書の執筆時点で、この結果が査読を経て確定した状況を本書は確認していない。結果が確定すれば、図 8.1 の Newton 力学から流体方程式までの矢印が（適切な状況設定のもとで）一本につながることになる。

8.3.3 不可逆性の起源

Newton の運動方程式は時間反転について対称である。一方、Boltzmann 方程式は H 定理によって時間の向きを持つ。可逆な力学から不可逆な方程式が出てくることは矛盾に見え、Boltzmann の時代から議論の的になった（Loschmidt の反論）。

Lanford の定理はこの点について次のように答える。定理が保証するのは、初期分布が積の形（独立）であるときに、時刻 $t>0$ で極限が Boltzmann 方程式に従うことである。時刻 t の状態で全粒子の速度を反転したものを新たな初期状態にすると、Newton 力学に従えば時間を逆にたどって元に戻る（H が増える）。しかし速度を反転した状態は、衝突直後の粒子対の間に相関を持っており、積の形をしていない。定理の仮定を満たさないので、Boltzmann 方程式に従う必要はない。つまり Boltzmann 方程式は「典型的な」（積の形の確率分布から見てほとんどすべての）初期条件に対して成り立つ極限であり、不可逆性は方程式でなく初期条件の選び方に由来する。

極限は時間反転と可換でない

Boltzmann–Grad 極限の操作と時間反転の操作は可換でない。極限を取ってから時間を反転すると、Boltzmann 方程式の時間反転（H が増える方程式）になるが、これは粒子系の極限として現れない。物理の近似が元の方程式の対称性を壊すのは珍しくなく、壊れ方は「どの初期条件の集合で極限を取ったか」で決まる。第 6 章の平均場極限が時間反転対称性を保つ（Vlasov 方程式は可逆）のと対照的である。

例題 8.4　級数の評価は解の存在より先に壊れる　★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

Lanford の証明の第 2 段の事情を、数の列の階層で見る。$a_k(t)$（$k=1,2,\dots$）が

$$\frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}t} = -k\,a_{k+1}, \qquad a_k(0)=1$$

を満たすとする（k 番目の量の発展に $k+1$ 番目の量が現れる点が BBGKY 階層と同じ形である）。

1. $a_k(t)=a(t)^k$ の形を仮定すると a は $\dot a=-a^2$ を満たすことを示し、$a_k(t)=(1+t)^{-k}$ がすべての $t\ge 0$ で解であることを確かめよ。
2. 積分形 $a_k(t)=1-k\int_0^t a_{k+1}(s)\,\mathrm{d}s$ を反復代入して、$a_1(t)$ を t の冪級数として求めよ。
3. 各項を絶対値で評価したときの級数が収束する範囲を求め、$t=\frac{1}{2}$ で真の値と評価の値を比べよ。

解答. **(1)** $a_k=a^k$ を代入すると左辺は $ka^{k-1}\dot a$、右辺は $-ka^{k+1}$ なので、$\dot a=-a^2$ と同値である。$a(0)=1$ の解は $a=1/(1+t)$ で、すべての $t\ge 0$ で有限である。このとき $a_k=(1+t)^{-k}$ で、直接微分しても $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t)^{-k}=-k(1+t)^{-k-1}=-ka_{k+1}$ となる。積の形 $a_k=a^k$ が保たれ

ることがカオスの伝播に、$\dot a = -a^2$ が Boltzmann 方程式に当たる。
(2) j 回代入すると、a_1 に現れる第 j 項は係数 $(-1)^j \cdot 1 \cdot 2 \cdots j = (-1)^j j!$ と、時間の j 重積分 $\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{j-1}} \mathrm{d}s_j \cdots \mathrm{d}s_1 = t^j/j!$ の積になる。したがって

$$a_1(t) = \sum_{j \ge 0} (-1)^j \, j! \, \frac{t^j}{j!} = \sum_{j \ge 0} (-t)^j .$$

k 番目の量が $k+1$ 番目の量を呼ぶたびに係数 k が掛かり、それが $1/j!$ を打ち消している。
(3) 各項の絶対値は t^j なので、評価の級数 $\sum t^j = 1/(1-t)$ は $t<1$ でしか収束しない。$t = \tfrac12$ では真の値が $a_1 = 2/3$、絶対値の評価が 2 である。真の解 $1/(1+t)$ はすべての時刻で存在するのに、符号の打ち消し合いを捨てた評価は $t=1$ で発散する。級数そのもの $\sum (-t)^j$ も $t \ge 1$ では収束しないので、級数展開という方法自体がこの時刻を越えられない。Lanford の定理の t_* が Boltzmann 方程式の解の存在時間でなく、この種の評価の収束半径で決まっていることが、この小さな例で見える（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。

8.4 保存則と閉じないモーメント方程式

★★★ 最重要 流体方程式の骨組み（保存則）は Boltzmann 方程式から無条件に出る。近似が入るのは応力と熱流束の閉じ方だけ

Boltzmann 方程式 (8.3) に衝突不変量 $\phi \in \{m,\ m\boldsymbol{v},\ \tfrac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2\}$ を掛けて $\boldsymbol{v}$ で積分すると、右辺は 0 になり、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \phi f \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \int \boldsymbol{v} \phi f \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} = 0 \tag{8.19}$$

を得る。巨視的な量を次のように定める。

$$\rho = m\int f \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}, \qquad \rho \boldsymbol{u} = m\int \boldsymbol{v} f \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}, \qquad \frac{3}{2} n k_{\mathrm B} T = \frac{m}{2}\int |\boldsymbol{c}|^2 f \, \mathrm{d}\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}), \tag{8.20}$$

$$P_{ij} = m\int c_i c_j f \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{q} = \frac{m}{2}\int |\boldsymbol{c}|^2 \boldsymbol{c} \, f \, \mathrm{d}\boldsymbol{v}. \tag{8.21}$$

$\boldsymbol{c}$ を**特異速度**（流れに乗った系から見た分子の速度）、P_{ij} を**応力テンソル**（圧力テンソル）、$\boldsymbol{q}$ を**熱流束**という。温度 T は、特異速度の運動エネルギーで定義している。$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{c}$ を代入して整理すると（例題 8.5）、

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{8.22}$$

$$\partial_t (\rho u_i) + \partial_j (\rho u_i u_j + P_{ij}) = 0, \tag{8.23}$$

$$\partial_t \Big(\frac12 \rho |\boldsymbol{u}|^2 + \frac32 n k_{\mathrm B} T \Big) + \partial_j \Big[\Big(\frac12 \rho |\boldsymbol{u}|^2 + \frac32 n k_{\mathrm B} T \Big) u_j + P_{ij} u_i + q_j \Big] = 0 \tag{8.24}$$

（繰り返す添字は和を取る）。これは質量・運動量・エネルギーの保存則であり、どんな f についても厳密に成り立つ。

しかし式 (8.22)–(8.24) は閉じていない。未知量 $\rho, \boldsymbol{u}, T$（5 個）に対し、方程式は 5 本だが、P_{ij}（6 成分）と $\boldsymbol{q}$（3 成分）が f のより高次のモーメントとして新たに現れる。P_{ij} や $\boldsymbol{q}$ の時間発展を求めようとして $\boldsymbol{v}$ のより高い冪を掛けて積分すると、さらに高次のモーメントが現れ、連鎖は終わらない。これは第 6 章の BBGKY 階層（k 粒子分布の方程式に $k+1$ 粒子分布が現れる）と同じ構造であり、第 9 章で扱う乱流の Reynolds 応力（平均流の方程式に揺らぎの相関が現れる）とも同じ構造である。

流体方程式のどこが近似か

保存則 (8.22)–(8.24) は近似でない。近似が入るのは、P_{ij} と $\boldsymbol{q}$ を $\rho, \boldsymbol{u}, T$ とその勾配で表す**構成則**の部分だけである。

- $P_{ij}=p\,\delta_{ij}$、$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$（$p=nk_{\mathrm B}T$）と置くと圧縮性 Euler 方程式になる。
- $P_{ij}=p\,\delta_{ij}-\mu\bigl(\partial_i u_j+\partial_j u_i-\tfrac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\bigr)$、$\boldsymbol{q}=-\kappa\nabla T$ と置くと圧縮性 Navier–Stokes–Fourier 方程式になる。

後の 2 節は、この二つの構成則が Boltzmann 方程式から Kn の 0 次と 1 次として出てくること、そのとき μ と κ が分子の衝突から計算できることを示す。

例題 8.5　保存則と Euler 方程式の構成則 ★★★ 最重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

1. Boltzmann 方程式に mv_i を掛けて積分し、運動量保存則 (8.23) を導け。
2. f が Maxwell 分布 $M_{n,\boldsymbol{u},T}$ のとき、$P_{ij}=nk_{\mathrm B}T\,\delta_{ij}$、$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ となることを示せ。1 次元 Gauss 積分 $\int_{\mathbb R}c^2\mathrm{e}^{-c^2/(2s)}\mathrm{d}c/\sqrt{2\pi s}=s$ は使ってよい。

解答. **(1)** mv_i は衝突不変量なので右辺は 0 で、$\partial_t\int mv_i f+\partial_j\int mv_iv_jf=0$。第 1 項は $\partial_t(\rho u_i)$。第 2 項で $v_i=u_i+c_i$ と書くと

$$\int mv_iv_jf=u_iu_j\int mf+u_i\int mc_jf+u_j\int mc_if+\int mc_ic_jf=\rho u_iu_j+P_{ij}.$$

中央の 2 項は $\int m\boldsymbol{c}f=\int m\boldsymbol{v}f-\boldsymbol{u}\int mf=\rho\boldsymbol{u}-\rho\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ により消える。
(2) Maxwell 分布は特異速度 $\boldsymbol{c}$ について 3 成分が独立な Gauss 分布（各成分の分散 $s=k_{\mathrm B}T/m$）に n を掛けたものである。$i\neq j$ なら $\int c_ic_jM=n\langle c_i\rangle\langle c_j\rangle=0$、$i=j$ なら $\int c_i^2M=ns$。よって $P_{ij}=mns\,\delta_{ij}=nk_{\mathrm B}T\delta_{ij}$。熱流束 $\int|\boldsymbol{c}|^2c_iM$ は $\boldsymbol{c}\mapsto-\boldsymbol{c}$ で符号を変える奇関数の積分なので 0。以上を式 (8.23)–(8.24) に入れると、$p=nk_{\mathrm B}T$ を圧力とする圧縮性 Euler 方程式になる。内部エネルギー密度は $\frac{3}{2}p$ なので、比熱比は $\gamma=\frac{5/2}{3/2}=\frac{5}{3}$（単原子気体の値）である（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。

8.5　Hilbert 展開と圧縮性 Euler 方程式

★★★ 最重要　局所平衡と Euler 方程式が、漸近展開の最低次とその可解条件（Fredholm の二者択一）として出てくる仕組み

8.5.1　無次元化

代表的な長さ L、代表的な分子の速さ $c_0=\sqrt{k_{\mathrm B}T_0/m}$、代表的な密度 n_0 で変数を無次元化し、時間の単位を L/c_0 に取る。衝突演算子は $n_0\pi d^2c_0$ 程度の大きさ（1 秒あたりの衝突回数）を持つので、無次元化した Boltzmann 方程式は

$$\partial_t f+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}f=\frac{1}{\varepsilon}Q(f,f),\qquad \varepsilon=\mathrm{Kn}\sim\frac{1}{n_0\pi d^2L}\tag{8.25}$$

となる（数係数は ε に吸収した）。$\varepsilon\to0$ は、衝突の項が輸送の項より圧倒的に大きい極限であり、第 7 章で見た特異摂動の形（最高階でなく最も強い項に小さい係数の逆数が付く）をしている。

8.5.2　Hilbert 展開の最低次

Hilbert（1912）は f を ε の冪級数

$$f=f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2f_2+\cdots\tag{8.26}$$

に展開して式 (8.25) に代入し、ε の各次数を比べた。Q は双線型なので、対称化した $Q(f,g)$（$\frac{1}{2}(Q(f,g)+Q(g,f))$）を使うと、

$$\mathcal{O}(\varepsilon^{-1}): \quad Q(f_0, f_0) = 0, \tag{8.27}$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^{0}): \quad (\partial_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}})f_0 = 2Q(f_0, f_1). \tag{8.28}$$

系 8.5 から、式 (8.27) の解は各点で Maxwell 分布、すなわち

$$f_0(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = M_{n(t,\boldsymbol{x}),\,\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}),\,T(t,\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{v}) \tag{8.29}$$

であり、これを**局所 Maxwell 分布**という。5 個の場 $n, \boldsymbol{u}, T$ はこの段階では決まらない。それを決めるのが次の次数の可解条件である。

8.5.3 線型化衝突演算子と Fredholm の二者択一

式 (8.28) は f_1 についての線型方程式である。$f_1 = Mh_1$（$M = f_0$）と書き、**線型化衝突演算子**

$$\mathcal{L}h = -\frac{2}{M}Q(M, Mh) \tag{8.30}$$

を定義すると、式 (8.28) は

$$\mathcal{L}h_1 = -\frac{1}{M}(\partial_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}})M \tag{8.31}$$

になる。この方程式を解けるかどうかを考えるために、関数の空間を準備する。

定義 8.7 (重み付き L^2 空間)**.** 速度の関数 g, h の内積を $\langle g,\, h\rangle_M = \int g(\boldsymbol{v})h(\boldsymbol{v})M(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ で定め、$\|h\|_M^2 = \langle h,\, h\rangle_M < \infty$ となる関数全体を $L^2(M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v})$ と書く。これは内積を持ち、ノルムについて完備な（Cauchy 列が収束する）線型空間、すなわち**ヒルベルト空間**である。

命題 8.8 (線型化衝突演算子の構造 ★★★ 最重要)**.** $\mathcal{L}$ は $L^2(M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v})$ で対称かつ非負である。

$$\langle g,\, \mathcal{L}h\rangle_M = \langle \mathcal{L}g,\, h\rangle_M, \qquad \langle h,\, \mathcal{L}h\rangle_M = \frac{d^2}{8}\iiint MM_*\left(h+h_*-h'-h'_*\right)^2|(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)\cdot\boldsymbol{\omega}| \geq 0. \tag{8.32}$$

特に $\operatorname{Ker}\mathcal{L} = \operatorname{span}\{1, v_1, v_2, v_3, |\boldsymbol{v}|^2\}$（5 次元）である。

証明. $MM_* = M'M'_*$（例題 8.3）を使うと、$Q(M,Mh)+Q(Mh,M)$ の被積分関数は $MM_*(h'+h'_*-h-h_*)$ になる。補題 8.1 と同じ変数の入れ替え（$\boldsymbol{v}\leftrightarrow\boldsymbol{v}_*$ と衝突写像）を $\int g\cdot(\cdots)\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ に施すと、

$$\langle g,\, \mathcal{L}h\rangle_M = \frac{d^2}{8}\iiint MM_*(g+g_*-g'-g'_*)(h+h_*-h'-h'_*)|(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_*)\cdot\boldsymbol{\omega}|$$

となり、g, h について対称である。$g = h$ とすれば非負性を得る。$\langle h,\, \mathcal{L}h\rangle_M = 0$ は $h + h_* = h' + h'_*$ と同値なので、定理 8.3 により核は衝突不変量の空間である。 □

有限次元の対称行列 A については、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つことと、$\boldsymbol{b}$ が $\operatorname{Ker}A$ に直交することが同値である（$\operatorname{Ran}A = (\operatorname{Ker}A^{\top})^{\perp}$ で、$A^{\top} = A$）。これを **Fredholm の二者択一**という。無限次元では、$\operatorname{Ran}\mathcal{L}$ が閉集合であるという追加の条件が要る。

定理 8.9 (線型化方程式の可解性 ★★★ 最重要)**.** 剛体球の $\mathcal{L}$ について、$\mathcal{L}h = S$ が $L^2(M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v})$ に解 h を持つための必要十分条件は

$$\langle S,\, \phi\rangle_M = 0 \qquad (\phi = 1, v_1, v_2, v_3, |\boldsymbol{v}|^2) \tag{8.33}$$

である。このとき解は $\operatorname{Ker}\mathcal{L}$ の元を足す自由度を除いて一意であり、$\operatorname{Ker}\mathcal{L}$ に直交する解がただ一つある。

証明の骨格．必要性は対称性から直ちに出る：$\langle S,\,\phi\rangle_M = \langle \mathcal{L}h,\,\phi\rangle_M = \langle h,\,\mathcal{L}\phi\rangle_M = 0$。十分性の要は、剛体球の $\mathcal{L}$ が

$$\mathcal{L}h = \nu(\boldsymbol{v})h - Kh, \qquad \nu(\boldsymbol{v}) \geq \nu_0 > 0 \tag{8.34}$$

と、正の関数 ν（損失項に由来する衝突頻度）を掛ける作用素と、**コンパクト作用素** K（有界な関数列を、収束する部分列を持つ列へ写す作用素）の差に分解できることである。この分解は Hilbert が剛体球について示し、Grad がより広い分子間力に拡張した。ν を掛ける作用素は逆を持ち、コンパクト作用素は「ほぼ有限次元」なので、有限次元と同じ二者択一が成り立つ（Fredholm の理論）。この分解の証明が難所であり、本書では認める。 □

例（BGK 模型での二者択一） 後で使う BGK 模型（8.6 節）では、衝突演算子を $Q_{\mathrm{BGK}}(f) = (M_f - f)/\tau$（$M_f$ は f と同じ $n, \boldsymbol{u}, T$ を持つ Maxwell 分布）で置き換える。$f = M(1+\varepsilon h)$ と置いて ε の 1 次を取ると、$M_f = M(1+\varepsilon\,\Pi h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ となる。ここで Π は $L^2(M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v})$ での $\mathrm{span}\{1, \boldsymbol{v}, |\boldsymbol{v}|^2\}$ への直交射影である（M_f のパラメータは f のモーメントで決まり、Πh は h と同じモーメントを持つ核の元だから）。したがって線型化 BGK 演算子は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BGK}} h = \frac{1}{\tau}(h - \Pi h) \tag{8.35}$$

であり、$\mathrm{Ran}\,\mathcal{L}_{\mathrm{BGK}} = \mathrm{Ker}\,\Pi = (\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}_{\mathrm{BGK}})^{\perp}$、核に直交する右辺 S に対する解は $h = \tau S$ である。二者択一がそのまま目に見える形になっている（速度を 1 次元に離散化した数値例で、核の次元と可解条件を確かめた。検算 `scripts/verify_ch08.py`）。

8.5.4 可解条件から Euler 方程式へ

定理 8.9 を式 (8.31) に適用すると、f_1 が存在するための条件は

$$\int (\partial_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}) M\,\phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = 0 \qquad (\phi = 1, \boldsymbol{v}, |\boldsymbol{v}|^2) \tag{8.36}$$

である。これは 8.4 節のモーメント方程式に $f = M$ を入れたものにほかならず、例題 8.5 から圧縮性 Euler 方程式

$$\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0, \quad \partial_t(\rho\boldsymbol{u}) + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) + \nabla p = \boldsymbol{0}, \quad \partial_t E + \nabla\cdot\big((E+p)\boldsymbol{u}\big) = 0 \tag{8.37}$$

（$p = nk_{\mathrm{B}}T$、$E = \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{u}|^2 + \frac{3}{2}p$）になる。局所 Maxwell 分布の 5 個の場が Euler 方程式に従うことが、展開を 1 段先へ進めるための条件として出てきた。

可解条件が方程式を決める

最低次 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ の方程式は、場 $n, \boldsymbol{u}, T$ の時間発展について何も言わない（どんな場でも局所 Maxwell 分布は $Q = 0$ を満たす）。場の発展は、次の次数の方程式が解けるという要請から決まる。第 7 章の多重尺度法で、永年項が出ないという条件から振幅の方程式が決まったのと同じ論理である。速い過程（衝突による緩和）の核に入る成分が遅い変数（流体の場）になり、可解条件が遅い変数の方程式になる。

8.5.5 厳密化と限界

Hilbert 展開の打ち切りが真の解に近いことは、圧縮性 Euler 方程式 (8.37) の滑らかな解が存在する時間区間では、Caflisch（1980）などによって証明されている。主張の形は「Euler 方程式の滑らかな解から作った Hilbert 展開の打ち切りの近くに Boltzmann 方程式の解があり、$\varepsilon \to 0$ で差が 0 に行く」である。

しかし Euler 方程式は有限時間で衝撃波を作る（滑らかな解が壊れる）。衝撃波の内部では密度や温度が平均自由行程程度の距離で変化するので、局所的に $\mathrm{Kn} = \lambda/L$ が $\mathcal{O}(1)$ になり、展開の前提が崩れる。また Hilbert 展開の 1 次の係数 f_1 には粘性による寄与が入るが、それは Euler の場の上に線型化した補正として現れるだけで、Navier–Stokes 方程式そのものは出てこない。粘性を方程式に取り込むには、展開を組み替える必要がある。

例題 8.6　3 状態の模型で見る Hilbert 展開と可解条件 ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ が

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\varepsilon} A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に従うとする（A が衝突、$\boldsymbol{F}$ が輸送の役をする）。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \varepsilon \boldsymbol{x}_1 + \cdots$ と展開する。

1. A が対称・非負で、$\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\{(1,1,1)\}$ であることを示せ。$\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ の方程式から $\boldsymbol{x}_0 = m(t)(1,1,1)$ となることを導け。
2. $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ の方程式 $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{F} - \dot{m}(1,1,1)$ の可解条件から $\dot{m}$ を決めよ。
3. $\boldsymbol{x}_1$ のうち $\operatorname{Ker} A$ に直交するものを求めよ。
4. 成分の和 $S = x_1 + x_2 + x_3$ の厳密な方程式を書き、(2) の結果が ε によらず厳密であることを確かめよ。

解答. **(1)** A は対称で、$\boldsymbol{y} \cdot A\boldsymbol{y} = (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 \geq 0$。これが 0 になるのは $y_1 = y_2 = y_3$ のときに限るので、核は $(1,1,1)$ で張られる（非負対称行列では $\boldsymbol{y} \cdot A\boldsymbol{y} = 0$ と $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が同値）。$\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ の方程式は $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{x}_0 = m(t)(1,1,1)$ で、m はこの次数では決まらない。
(2) Fredholm の二者択一から、右辺が核 $(1,1,1)$ に直交することが必要十分である：$(1,1,1) \cdot (\boldsymbol{F} - \dot{m}(1,1,1)) = 3 - 3\dot{m} = 0$。よって $\dot{m} = 1$。遅い変数 m の方程式が、次の次数の可解条件として出てくる。
(3) 右辺は $(3,0,0) - (1,1,1) = (2,-1,-1)$。$A\boldsymbol{y} = (y_1 - y_2,\ -y_1 + 2y_2 - y_3,\ y_3 - y_2)$ なので、$y_2 = 0$ と置けば $y_1 = 2$、$y_3 = -1$ で、第 2 成分も $-2 + 0 + 1 = -1$ を満たす。核の成分を引いて和を 0 にすると

$$\boldsymbol{x}_1 = (2,0,-1) - \tfrac{1}{3}(1,1,1) = \left(\tfrac{5}{3}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{4}{3}\right).$$

(4) $(1,1,1)A = \boldsymbol{0}$ なので $\dot{S} = (1,1,1) \cdot \boldsymbol{F} = 3$ が ε によらず厳密に成り立つ。$m = S/3$ と置けば $\dot{m} = 1$ で、(2) と一致する。$(1,1,1)$ が衝突不変量、S が保存量、$\dot{S} = 3$ が保存則の役をしている。一方、核に直交する部分は時間 ε 程度で $\varepsilon \boldsymbol{x}_1$ に緩和する。$\varepsilon = 0.1$ と 0.01 で数値的に解くと、$t = 2$ で $(\boldsymbol{x} - m(1,1,1))/\varepsilon$ は $(1.6667, -0.3333, -1.3333)$ になる（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。Boltzmann 方程式では核が 5 次元 $(1, \boldsymbol{v}, |\boldsymbol{v}|^2)$ で、5 本の可解条件が Euler 方程式になる。

8.6　Chapman–Enskog 展開と Navier–Stokes 方程式

★★★ 最重要　粘性係数と熱伝導率が分子の衝突から計算できること、BGK 模型で計算を最後まで実行する

8.6.1　Hilbert 展開との違い

Chapman（1916–17）と Enskog（1917）は、次の二点で展開を組み替えた。

1. 場 $n, \boldsymbol{u}, T$ を**真の解 f のモーメント**で定義し、展開しない。補正 $f_1, f_2, \ldots$ は $1, \boldsymbol{v}, |\boldsymbol{v}|^2$ のモーメントを持たないように取る。
2. f が時間に依存するのは場を通してだけと考え（正規解の仮定）、場の時間微分を ε で展開する：$\partial_t = \partial_t^{(0)} + \varepsilon \partial_t^{(1)} + \cdots$。$\partial_t^{(0)}$ は Euler 方程式の流束で、$\partial_t^{(1)}$ は次の次数の流束で定める。

この組み替えによって、$\mathcal{O}(\varepsilon)$ まで取った保存則は ε に比例する粘性項・熱伝導項を含む一つの方程式系になる。それが圧縮性 Navier–Stokes–Fourier 方程式である。

8.6.2 BGK 模型

剛体球の $\mathcal{L}^{-1}$ は閉じた形で計算できない（Sonine 多項式による級数展開で数値的に求める）。計算を最後まで手で行うため、Bhatnagar・Gross・Krook（1954）が導入した BGK 模型

$$\partial_t f + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} f = \frac{M_f - f}{\tau} \tag{8.38}$$

を使う。M_f は、f と同じ $n, \boldsymbol{u}, T$ を持つ局所 Maxwell 分布、τ は緩和時間（衝突の平均間隔に相当）である。BGK 模型は剛体球の Q と次の性質を共有する。

- M_f と f は $1, \boldsymbol{v}, |\boldsymbol{v}|^2$ のモーメントが等しいので、$\int (M_f - f)\phi \,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = 0$（衝突不変量の保存）。
- 右辺が 0 になるのは $f = M_f$、すなわち Maxwell 分布のときに限る。
- H 定理が成り立つ：$\int (M_f - f)\ln f \,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int (M_f - f)(\ln f - \ln M_f)\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} \le 0$（$\ln M_f$ は衝突不変量なので差し引いてよく、$(a-b)(\ln b - \ln a) \le 0$）。

BGK は C 型の近似である

BGK 模型は、Boltzmann–Grad 極限のような小さいパラメータの極限から出てくるものではない。衝突演算子という未知の複雑な項を、保存則と H 定理を満たす単純な形で置き換えたモデルであり、第 1 章の分類では C 型（閉じる）に属する。そのため保存則・平衡・H 定理のような構造的な性質は正しく再現するが、定量的な輸送係数の比（次に見る Prandtl 数）は外れる。

8.6.3 1 次の補正

以下では次元を戻し、τ を小さいパラメータとして扱う（無次元化すれば $\tau \to \varepsilon\tau$ である）。$f = M + f^{(1)} + \cdots$ と置くと、$\mathcal{O}(\tau^0)$ で

$$f^{(1)} = -\tau(\partial_t^{(0)} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}})M = -\tau M\, D\ln M, \qquad D := \partial_t^{(0)} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}} \tag{8.39}$$

である（BGK の線型化演算子は $(h - \Pi h)/\tau$ なので、核に直交する右辺に対して解は τ を掛けるだけで済む）。$D\ln M$ を計算する。$\ln M = \ln n - \frac{3}{2}\ln T - \frac{m|\boldsymbol{c}|^2}{2k_{\mathrm{B}}T} + $ 定数 を $n, \boldsymbol{u}, T$ について微分し、時間微分を Euler 方程式

$$(\partial_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla)n = -n\nabla\cdot\boldsymbol{u}, \qquad (\partial_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{\nabla p}{mn}, \qquad (\partial_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla)T = -\frac{2}{3}T\nabla\cdot\boldsymbol{u} \tag{8.40}$$

で置き換え、$\boldsymbol{v}\cdot\nabla = \boldsymbol{u}\cdot\nabla + \boldsymbol{c}\cdot\nabla$ と分ける。$\nabla p/(nk_{\mathrm{B}}T) = \nabla n/n + \nabla T/T$ を使うと ∇n を含む項は打ち消し合い、$\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ の項は $-1 + 1 - \frac{m|\boldsymbol{c}|^2}{3k_{\mathrm{B}}T}$ にまとまる。結果は

$$D\ln M = \frac{m}{k_{\mathrm{B}}T}\Big(c_i c_j - \frac{1}{3}|\boldsymbol{c}|^2\delta_{ij}\Big)\partial_j u_i + \Big(\frac{m|\boldsymbol{c}|^2}{2k_{\mathrm{B}}T} - \frac{5}{2}\Big)\frac{\boldsymbol{c}\cdot\nabla T}{T} \tag{8.41}$$

である（検算 `scripts/verify_ch08.py`。Euler 方程式で時間微分を消去した式を記号計算で照合した）。第 1 項は速度勾配のうち対称でトレースのない部分（ずれ変形）、第 2 項は温度勾配にだけ比例し、密度勾配は残らない。また式 (8.41) は $1, \boldsymbol{c}, |\boldsymbol{c}|^2$ と M の重みで直交しており、可解条件を満たしている。実際、第 1 項は $\boldsymbol{c}$ について偶でトレースがないので 1 と $|\boldsymbol{c}|^2$ との積分が 0（$\int |\boldsymbol{c}|^2 c_i c_j M = 5ns^2\delta_{ij}$ と $\int |\boldsymbol{c}|^4 M = 15ns^2$ の比がちょうど 1/3）、$\boldsymbol{c}$ との積分は奇関数で 0 になる。第 2 項は $\boldsymbol{c}$ について奇なので $1, |\boldsymbol{c}|^2$ との積分が 0、c_k との積分は $\big(\frac{5ns^2}{2s} - \frac{5}{2}ns\big)\delta_{kj} = 0$ になる。

8.6.4 粘性率・熱伝導率・Prandtl 数

Maxwell 分布についての Gauss 積分

$$\int c_i c_j M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = n s\,\delta_{ij}, \qquad \int c_i c_j c_k c_l M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = n s^2(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}), \tag{8.42}$$

$$\int |\boldsymbol{c}|^2 c_i c_j M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = 5 n s^2 \delta_{ij}, \qquad \int |\boldsymbol{c}|^4 c_i c_j M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = 35 n s^3 \delta_{ij} \qquad (s = k_{\mathrm{B}}T/m) \tag{8.43}$$

を使うと、$f^{(1)}$ の応力と熱流束が計算できる（例題 8.7）。結果は

$$P_{ij} = p\,\delta_{ij} - \mu\Big(\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\Big), \qquad \boldsymbol{q} = -\kappa\nabla T, \tag{8.44}$$

$$\mu = p\tau = n k_{\mathrm{B}} T \tau, \qquad \kappa = \frac{5}{2}\,\frac{k_{\mathrm{B}}}{m}\,p\tau \tag{8.45}$$

である（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。体積粘性（$\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ に比例する等方的な応力）は 0 になる。これは単原子気体の内部自由度がないことの反映である。

定理 8.10 (BGK 模型の Chapman–Enskog 1 次 ★★★ 最重要)**.** *BGK* 模型 (8.38) の *Chapman–Enskog* 展開を $\mathcal{O}(\tau)$ で打ち切ると、保存則 (8.22)–(8.24) は構成則 (8.44)、輸送係数 (8.45) の圧縮性 *Navier–Stokes–Fourier* 方程式になる。*Prandtl* 数（運動量の拡散と熱の拡散の比）は

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_p\,\mu}{\kappa} = \frac{\frac{5}{2}\frac{k_{\mathrm{B}}}{m}\cdot p\tau}{\frac{5}{2}\frac{k_{\mathrm{B}}}{m}\,p\tau} = 1 \tag{8.46}$$

である（$c_p = \frac{5}{2}k_{\mathrm{B}}/m$ は単原子気体の単位質量あたりの定圧比熱）。

実際の単原子気体（アルゴンなど）の Prandtl 数は約 2/3 である。剛体球の衝突演算子で Chapman–Enskog の計算を行うと、第 1 近似で $\kappa = \frac{15}{4}\frac{k_{\mathrm{B}}}{m}\mu$（Eucken の関係）となり、$\mathrm{Pr} = \frac{5/2}{15/4} = \frac{2}{3}$ が出る（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。BGK 模型は、運動量と熱という二つの量の緩和を同じ一つの時間 τ で起こさせているので、両者の比を正しく与えられない。緩和先の Maxwell 分布を異方的な Gauss 分布に置き換えた ES-BGK 模型（Holway による）などは、この比を合わせるための修正である。

例（剛体球の粘性率） 剛体球の Chapman–Enskog 計算の結果は

$$\mu_{\mathrm{HS}} = 1.016\ldots \times \frac{5}{16\,d^2}\sqrt{\frac{m k_{\mathrm{B}} T}{\pi}} \tag{8.47}$$

である。$\frac{5}{16d^2}\sqrt{mk_{\mathrm{B}}T/\pi}$ は Sonine 多項式展開の第 1 近似で、係数 $1.016\ldots$ は高次の近似による補正である。この式は**密度によらない**。圧力を下げて分子が少なくなっても粘性は変わらない（運ぶ分子が減る分だけ平均自由行程が伸びて、遠くまで運動量を運ぶ）。Maxwell がこの性質を予言し、実験で確かめたことは分子運動論の初期の成功として知られる。BGK でも $\tau \propto 1/n$ とすれば $\mu = p\tau$ は n によらない。空気（平均分子量 28.97、$T = 293\,\mathrm{K}$）に有効直径 $d \approx 0.37\,\mathrm{nm}$ を入れると $\mu_{\mathrm{HS}} \approx 1.83\times10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}$ となり、実測値 $1.81\times10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}$ に近い（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。ただし $d \approx 0.37\,\mathrm{nm}$ という値自体が粘性率などから逆算された有効直径なので、これは予言でなく整合性の確認である。

例題 8.7　BGK 模型から粘性率と熱伝導率を求める ★★★ 最重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

BGK 模型の Chapman–Enskog 1 次の補正 $f^{(1)} = -\tau M\,D\ln M$（$D\ln M$ は式 (8.41)）について、次を求めよ。$s = k_{\mathrm{B}}T/m$ とし、上の Gauss 積分の表を使ってよい。

1. 温度一様な単純ずれ流れ $\boldsymbol{u} = (\gamma y, 0, 0)$（$\gamma$ は定数）での応力 $P_{xy}^{(1)} = m\int c_x c_y f^{(1)} \mathrm{d}\boldsymbol{v}$。これから $\mu = p\tau$ を読み取れ。
2. 静止した気体（$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$）に温度勾配 $\nabla T = (T_x, 0, 0)$ があるときの熱流束 $q_x^{(1)} = \frac{m}{2}\int |\boldsymbol{c}|^2 c_x f^{(1)} \mathrm{d}\boldsymbol{v}$。これから κ を読み取れ。
3. Prandtl 数 $\mathrm{Pr} = c_p \mu/\kappa$ を求めよ。

解答. **(1)** $\partial_j u_i$ のうち 0 でないのは $\partial_y u_x = \gamma$ だけで、$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$。式 (8.41) は $D\ln M = \frac{m}{k_\mathrm{B}T} c_x c_y \gamma = \frac{\gamma}{s} c_x c_y$ となる。したがって

$$P_{xy}^{(1)} = -\tau m \frac{\gamma}{s}\int c_x^2 c_y^2 M \,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = -\tau m \frac{\gamma}{s}\, n s^2 = -\tau\, mns\,\gamma = -n k_\mathrm{B} T \tau\,\gamma.$$

ここで $\int c_x^2 c_y^2 M = ns^2(\delta_{xx}\delta_{yy} + 0 + 0) = ns^2$ を使った。Navier–Stokes の構成則では $P_{xy} = -\mu\,\partial_y u_x = -\mu\gamma$ なので、$\mu = n k_\mathrm{B} T\tau = p\tau$。
(2) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ で $D\ln M = \left(\frac{|\boldsymbol{c}|^2}{2s} - \frac{5}{2}\right)\frac{c_x T_x}{T}$。

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= -\tau\frac{m}{2}\frac{T_x}{T}\int |\boldsymbol{c}|^2 c_x^2 \left(\frac{|\boldsymbol{c}|^2}{2s} - \frac{5}{2}\right) M\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = -\tau\frac{m}{2}\frac{T_x}{T}\left(\frac{35 n s^3}{2s} - \frac{5}{2}\cdot 5 n s^2\right) \\ &= -\tau\frac{m}{2}\frac{T_x}{T}\cdot 5 n s^2 = -\frac{5}{2}\frac{n k_\mathrm{B}^2 T\tau}{m} T_x. \end{aligned}$$

Fourier の法則 $q_x = -\kappa T_x$ と比べて $\kappa = \frac{5}{2}\frac{k_\mathrm{B}}{m} n k_\mathrm{B} T\tau = \frac{5}{2}\frac{k_\mathrm{B}}{m} p\tau$。
(3) $\mathrm{Pr} = \frac{(5k_\mathrm{B}/2m)\,p\tau}{(5k_\mathrm{B}/2m)\,p\tau} = 1$。BGK の 1 本の緩和時間が運動量と熱の両方の拡散を決めているため、二つの拡散係数（動粘性率 μ/ρ と温度拡散率 $\kappa/(\rho c_p)$）が一致する。

8.6.5 次の次数と展開の限界

Chapman–Enskog 展開を $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ まで進めた方程式を Burnett 方程式という。Burnett 方程式は、静止平衡のまわりで線型化すると短い波長の擾乱が時間とともに増大することが Bobylev によって示されており、高次まで取れば精度が上がるという期待どおりにはならない。Chapman–Enskog 展開は収束級数でなく漸近級数であり、Kn が小さいときに 1 次まで取ることに意味がある。Kn が小さくない領域（希薄気体）では、流体方程式を高次にするのでなく Boltzmann 方程式そのもの（あるいは粒子法の数値計算）に戻る。

Navier–Stokes は極限方程式ではない

圧縮性 Navier–Stokes 方程式の粘性項は $\mathcal{O}(\mathrm{Kn})$ なので、$\mathrm{Kn}\to 0$ の極限を取ると消えて Euler 方程式に戻る。圧縮性 NS は「極限で得られる方程式」でなく、「極限からの 1 次の補正まで含めた方程式」である。極限定理の形で Navier–Stokes 方程式を得るには、粘性項が極限で残るようにスケーリングを選ぶ必要がある。それが次節の非圧縮スケーリングである。

8.7 何がどこまで証明されているか

★★ 重要　非圧縮 Navier–Stokes が極限定理として得られるスケーリングと、証明の現状を正確に押さえる

8.7.1 Reynolds 数・Mach 数・Knudsen 数の関係

流れの性格は、Reynolds 数 $\mathrm{Re} = \rho U L/\mu$（慣性と粘性の比）、Mach 数 $\mathrm{Ma} = U/c_s$（流速と音速の比）、Knudsen 数 $\mathrm{Kn} = \lambda/L$ で表される。運動論からは $\mu \sim \rho\bar{c}\lambda$（$\bar{c}$ は分子の平均の速さ）であり、$\bar{c}$

と音速 c_s は同じ桁なので、

$$\mathrm{Re} \sim \frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Kn}} \tag{8.48}$$

が成り立つ（von Kármán の関係）。初等運動論の $\mu = \frac{1}{2}\rho \bar{c} \lambda$ を使うと係数まで決まり、単原子気体（$\gamma = 5/3$）で $\mathrm{Re} = \sqrt{\pi\gamma/2}\,\mathrm{Ma}/\mathrm{Kn} \approx 1.62\,\mathrm{Ma}/\mathrm{Kn}$ である（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。

この関係から、$\mathrm{Kn} \to 0$ の極限の取り方によって異なる方程式が出ることが分かる。

- Ma を固定して $\mathrm{Kn} \to 0$ とすると、$\mathrm{Re} \to \infty$ となり、粘性は消えて圧縮性 Euler 方程式が出る（Hilbert 展開）。
- $\mathrm{Ma} \sim \mathrm{Kn} = \varepsilon \to 0$ とすると、$\mathrm{Re} = \mathcal{O}(1)$ に保たれ、粘性が極限で残る。同時に $\mathrm{Ma} \to 0$ なので圧縮性は消え、非圧縮性 Navier–Stokes 方程式が出る。

8.7.2 拡散スケーリングと Golse–Saint-Raymond の定理

$\mathrm{Ma} \sim \mathrm{Kn} = \varepsilon$ に対応して、Boltzmann 方程式を

$$\varepsilon\, \partial_t f_\varepsilon + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon), \qquad f_\varepsilon = M(1 + \varepsilon g_\varepsilon) \tag{8.49}$$

とスケールする。M は静止した一様な Maxwell 分布（$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$、$n = T = 1$）、$g_\varepsilon$ はそこからのずれで、ずれの大きさ ε が Mach 数に当たる。時間は ε^{-1} 倍に引き延ばされている（流体の時間尺度まで見る）ので、拡散スケーリングと呼ばれる。

定理 8.11（非圧縮 Navier–Stokes 極限（主張）★★ 重要）**.** 空間を $\mathbb{R}^3$ または周期的な箱とし、剛体球を含む一群の衝突演算子を考える。f_ε を *Boltzmann* 方程式の再正規化解（*DiPerna–Lions* による時間大域的な弱い意味の解）で、初期値の相対エントロピーが $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ に抑えられるものとする。このとき g_ε は（部分列で）弱い意味で

$$g = \rho + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \theta\, \frac{|\boldsymbol{v}|^2 - 5}{2} \tag{8.50}$$

の形の関数に収束し、$(\boldsymbol{u}, \theta)$ は非圧縮性 *Navier–Stokes–Fourier* 方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad \partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla P = \nu \Delta \boldsymbol{u}, \quad \partial_t \theta + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \theta = \kappa' \Delta \theta, \quad \nabla(\rho + \theta) = \boldsymbol{0} \tag{8.51}$$

の *Leray* の意味の弱解（*8.8* 節）になる。ν, κ' は線型化衝突演算子 $\mathcal{L}$ の逆から決まる定数である。

この主張は、Bardos・Golse・Levermore が 1990 年代初頭に提示したプログラム（弱解から弱解への極限として非圧縮流体方程式を導く方針）を、Golse と Saint-Raymond が 2004 年に完成させたものである。ここで「弱い意味」とは、関数そのものが各点で収束するのでなく、滑らかな試験関数 ψ との積分 $\int g_\varepsilon \psi$ が収束することを言う（8.9 節で詳しく述べる）。最後の式 $\nabla(\rho + \theta) = \boldsymbol{0}$ は Boussinesq の関係と呼ばれ、極限で圧力の揺らぎ $\rho + \theta$ が一様になること（音波が消えること）を表す。

この定理の位置

図 8.1 の「Boltzmann → 非圧縮性 NS」の矢印は、時間大域的に、大きなデータ（初期値の大きさに小ささの仮定がない）で、弱い意味で証明されている。代わりに得られる流体方程式の解も弱解であり、その一意性や滑らかさは分からない。これは次節の Navier–Stokes 方程式自体の未解決問題を引き継いでいる。

8.7.3 粒子系から流体まで

図 8.1 を上から下まで一本の定理で結ぶには、Boltzmann 方程式の導出（Lanford の定理）が流体の時間尺度まで延びている必要がある。拡散スケーリングでは平均自由時間の ε^{-2} 倍の時間を見るの

で、平均自由時間の数分の 1 しか保証しない Lanford の定理では届かない。8.3 節の注意で述べたとおり、2025 年に Deng・Hani・Ma のプレプリントが、Boltzmann 方程式の長時間導出を経て流体方程式まで到達したと主張している。これが確定すれば Hilbert の第 6 問題のこの部分に一つの解答を与えることになるが、査読の状況は本書では確定していない。

例題 8.8　空気の流れで Reynolds 数・Mach 数・Knudsen 数を見積もる ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

初等運動論の粘性率 $\mu = \frac{1}{2}\rho\bar{c}\lambda$、平均の速さ $\bar{c} = \sqrt{8k_{\mathrm{B}}T/(\pi m)}$、音速 $c_s = \sqrt{\gamma k_{\mathrm{B}}T/m}$ を使う。20 °C、1 気圧の空気では $\gamma = 1.4$、$c_s \approx 343\,\mathrm{m/s}$、動粘性率 $\nu = \mu/\rho \approx 1.50 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$、平均自由行程（$\mu$ から逆算した値）$\lambda \approx 65\,\mathrm{nm}$ とする。

1. $\mathrm{Re} = \rho U L/\mu = \sqrt{\pi\gamma/2}\,\mathrm{Ma}/\mathrm{Kn}$ を示せ。
2. 長さ $L = 1\,\mathrm{cm}$ で $\mathrm{Re} = 100$ となる流速 U と、そのときの Ma、Kn を求めよ。
3. 長さ $L = 1\,\mathrm{m}$ で $\mathrm{Ma} = 0.3$ の流れの Re を求めよ。
4. (2)(3) はそれぞれ本節の二つの極限のどちらに近いか。

解答. **(1)** $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho U L}{\frac{1}{2}\rho\bar{c}\lambda} = 2\,\dfrac{U}{c_s}\,\dfrac{L}{\lambda}\,\dfrac{c_s}{\bar{c}} = 2\,\dfrac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Kn}}\sqrt{\dfrac{\gamma k_{\mathrm{B}}T/m}{8k_{\mathrm{B}}T/(\pi m)}} = \sqrt{\dfrac{\pi\gamma}{2}}\,\dfrac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Kn}}$。空気では係数は $\sqrt{0.7\pi} \approx 1.48$ である。
(2) $U = \mathrm{Re}\,\nu/L = 100 \times 1.50 \times 10^{-5}/0.01 \approx 0.15\,\mathrm{m/s}$。$\mathrm{Ma} = 0.15/343 \approx 4.4 \times 10^{-4}$、$\mathrm{Kn} = 65 \times 10^{-9}/0.01 \approx 6.5 \times 10^{-6}$。比は $\mathrm{Ma}/\mathrm{Kn} \approx 67$ で、$1.48 \times 67 \approx 100$ と (1) に合う。
(3) $U = 0.3 \times 343 \approx 103\,\mathrm{m/s}$、$\mathrm{Kn} = 6.5 \times 10^{-8}$ なので $\mathrm{Re} \approx 1.48 \times 0.3/(6.5 \times 10^{-8}) \approx 6.9 \times 10^{6}$。
(4) (2) は Ma と Kn がともに小さく、比が $\mathcal{O}(10^2)$ にとどまって Re が有限な流れであり、$\mathrm{Ma} \sim \mathrm{Kn} \to 0$ の拡散スケーリング（非圧縮 Navier–Stokes）の側にある。(3) は Ma を有限に保ったまま Kn が非常に小さく、Re が 10^7 近い。これは $\mathrm{Kn} \to 0$ で粘性が消える側（Euler）であり、粘性は壁の近くの薄い境界層にだけ残る。空気の λ が短いために、日常の大きさの流れはほとんどが後者に入る。粘性が主役の流れを得るには、流れを遅く小さくして Ma を Kn と同じ程度まで下げる必要がある（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。

8.8　Navier–Stokes 方程式自体の数学

★★ 重要　近似として導いた方程式そのものの適切性が未解決であること。正当化の連鎖の弱い環

非圧縮性 Navier–Stokes 方程式

$$\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla P = \nu\Delta\boldsymbol{u}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{8.52}$$

について、物理屋が通常期待するのは「滑らかな初期値から出発すれば、滑らかな解がいつまでも一つ存在する」ことである。3 次元でこれが成り立つかどうかは分かっていない。2000 年に Clay 数学研究所が選んだミレニアム懸賞問題の一つは、$\mathbb{R}^3$（または周期的な箱）で、滑らかで十分速く減衰する初期値に対し、滑らかな解が時間大域的に存在するか、あるいは有限時間で解が滑らかでなくなる（爆発する）例があるかを問うものである。2 次元ではこの問題は解決していて、滑らかな解が時間大域的に一意に存在する。

8.8.1　エネルギー等式

滑らかな解について成り立つ唯一の大域的な評価は、エネルギーの評価である。

例題 8.9　エネルギー等式 ★★ 重要

［オリジナル］標準的な題材を自作

周期的な箱 Ω 上で、式 (8.52) の滑らかな解について

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\nu \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

を示せ（$|\nabla \boldsymbol{u}|^2 = \sum_{i,j} (\partial_j u_i)^2$）。

1. 非線型項の寄与 $\int u_i u_j \partial_j u_i \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ が 0 になることを示せ。
2. 圧力項の寄与 $\int u_i \partial_i P \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ が 0 になることを示せ。
3. 粘性項の寄与を部分積分で計算し、等式を完成させよ。

解答. 式 (8.52) の第 i 成分に u_i を掛けて和を取り、Ω で積分する。左辺の時間微分の項は $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |\boldsymbol{u}|^2$ になる。周期境界なので、部分積分で境界項は出ない。
(1) $u_i u_j \partial_j u_i = u_j \partial_j \big(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\big)$。部分積分すると $-\int (\partial_j u_j)\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 = 0$（$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$）。
(2) $\int u_i \partial_i P = -\int (\partial_i u_i) P = 0$。
(3) $\nu \int u_i \partial_j \partial_j u_i = -\nu \int (\partial_j u_i)(\partial_j u_i) = -\nu \int |\nabla \boldsymbol{u}|^2$。
以上から等式が成り立つ。積分すれば $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{u}(s)\|^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(0)\|^2$（$\|\cdot\|$ は $L^2(\Omega)$ のノルム）となり、運動エネルギーは粘性による散逸でだけ減る。非線型項はエネルギーを空間の中で（波数の間で）移し替えるだけで、総量を変えない。

8.8.2 Leray の弱解

エネルギー等式が抑えるのは $\boldsymbol{u}$ の 2 乗積分と $\nabla\boldsymbol{u}$ の 2 乗積分（の時間積分）だけである。これを関数空間の言葉で書くため、用語を定める。

定義 8.12 (L^2 空間・弱微分・H^1 空間)**.** 領域 Ω 上の関数 u で $\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty$ となるもの全体を $L^2(\Omega)$ と書く。$u \in L^2(\Omega)$ の**弱微分** $\partial_j u$ とは、すべての滑らかな試験関数 ψ（周期的、または Ω の境界の近くで 0）について $\int u\,\partial_j\psi = -\int (\partial_j u)\psi$ を満たす関数のことである。部分積分の公式が成り立つことを微分の定義にしたもので、通常の意味で微分できない関数（角のある関数など）にも微分が定まる。u とその弱微分がすべて $L^2(\Omega)$ に入る関数全体を Sobolev 空間 $H^1(\Omega)$ と書く。

方程式 (8.52) に、発散が 0 の滑らかな試験関数 $\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{x})$ を掛けて部分積分し、$\boldsymbol{u}$ の微分をすべて $\boldsymbol{\psi}$ へ移した式が成り立つとき、$\boldsymbol{u}$ を**弱解**という。圧力項は $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0$ によって消える。

定理 8.13 (Leray の弱解の存在（主張）★★ 重要)**.** $\Omega = \mathbb{R}^3$ または周期的な箱とし、$\boldsymbol{u}_0 \in L^2(\Omega)$ で $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0 = 0$ とする。このとき、すべての $t>0$ について $\boldsymbol{u}(t) \in L^2(\Omega)$ で、$\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{u}\|^2 < \infty$ を満たす弱解が存在し、エネルギー不等式

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|\nabla\boldsymbol{u}(s)\|^2 \mathrm{d}s \le \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_0\|^2 \tag{8.53}$$

を満たす（*Leray（1934）*）。

証明の骨格は第 4 章の Galerkin 法と同じである。有限個の Fourier モードに射影した方程式（常微分方程式）を解き、その解がエネルギー等式によってモード数によらず一様に抑えられることから、部分列の弱い意味の極限を取る。難所は非線型項 $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ の極限である。弱収束は積と可換でない（8.9 節）ので、空間微分の評価と時間微分の評価を組み合わせて強収束を得る議論（コンパクト性の

議論）が必要になる。極限ではエネルギー等式が不等式に弱まる。弱収束の極限ではノルムが下がりうるからである。

3 次元で分かっていないのは、Leray の弱解が一意か、滑らかかである。エネルギーが抑える量は 3 次元では方程式のスケーリングに対して弱すぎ（超臨界と呼ばれる）、細かいスケールで速度勾配が大きくなる可能性をエネルギーだけでは否定できない。さらに Leray の解より弱いクラスの弱解では、一意性が成り立たない例が構成されている（Buckmaster–Vicol）。

正当化の連鎖の弱い環

本章の流れを振り返ると、分子の力学から Boltzmann 方程式を導き、Boltzmann 方程式から Navier–Stokes 方程式を導いた。各段は極限定理として（条件付きで）正当化されている。しかし最後に得られた Navier–Stokes 方程式について、物理屋が暗黙に使っている「解が一つ存在して滑らかである」ことが 3 次元では証明されていない。Golse–Saint-Raymond の定理の極限が弱解であることも、この事情を反映している。乱流の数値計算は Navier–Stokes 方程式の解が滑らかであると仮定して行われており、もし有限時間の爆発があれば、そこでは Navier–Stokes 方程式そのもの（したがって $\mathrm{Kn} \to 0$ の前提）が崩れていることになる。

8.9 圧縮性から非圧縮性へ：低 Mach 数極限

★★ 重要　音波が速く振動して平均で消えるという、弱収束による極限の典型例

8.9.1 速い音波

等エントロピーの圧縮性 Euler 方程式を、流速 U と音速 c_s の比 $\varepsilon = \mathrm{Ma}$ で無次元化すると

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0, \qquad \partial_t (\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla p(\rho) = \boldsymbol{0} \tag{8.54}$$

になる。圧力の項に ε^{-2} が付くので、密度の揺らぎは $\rho = 1 + \varepsilon\sigma$ の形で $\mathcal{O}(\varepsilon)$ に抑えられる。線型の部分を取り出すと（音速を 1 とする）

$$\partial_t \sigma + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \cdots, \qquad \partial_t \boldsymbol{u} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \sigma = \cdots \tag{8.55}$$

となり、音波が速さ $1/\varepsilon$ で伝わる。速度場を、発散が 0 の部分 $\mathbb{P}\boldsymbol{u}$ と勾配の部分 $\mathbb{Q}\boldsymbol{u}$（Fourier 空間で波数ベクトルに垂直な成分と平行な成分）に分けると、式 (8.55) の速い振動に関わるのは σ と $\mathbb{Q}\boldsymbol{u}$ だけであり、それらは $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}|\boldsymbol{k}|t/\varepsilon}$ のように振動する。$\mathbb{P}\boldsymbol{u}$ は速い振動を持たない。

8.9.2 弱収束

定義 8.14 (弱収束)**.** 関数列 u_ε が u に**弱収束**する（$u_\varepsilon \rightharpoonup u$）とは、すべての滑らかな試験関数 ψ について $\int u_\varepsilon \psi \to \int u \psi$ となることをいう。

典型例は $u_\varepsilon(t) = \cos(t/\varepsilon)$ である。$t \in [0,1]$ で各点の値は収束しないが、$\psi(t) = 1 - t$ に対して $\int_0^1 \cos(t/\varepsilon)(1-t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon^2(1 - \cos(1/\varepsilon)) \to 0$ となり、一般の滑らかな ψ でも部分積分によって $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 以下になる。したがって $\cos(t/\varepsilon) \rightharpoonup 0$。一方で $\cos^2(t/\varepsilon) \rightharpoonup \frac{1}{2}$ であり、0 の 2 乗の 0 にはならない（数値は検算 `scripts/verify_ch08.py`）。**弱収束は積と可換でない**。振動のエネルギー（2 乗の平均）は弱極限に残るが、振動そのものは平均で消える。第 2 章で弱収束を導入したときの例、第 9 章の均質化で係数が速く振動する方程式の極限を考えるときの構造と同じである。

8.9.3 極限

$\varepsilon \to 0$ で、音波の部分 $\sigma, \mathbb{Q}\boldsymbol{u}$ は速く振動して 0 に弱収束し、$\mathbb{P}\boldsymbol{u}$ は非圧縮性 Euler 方程式（粘性があれば非圧縮性 Navier–Stokes 方程式）の解に収束する。圧力は $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ を保つための未定乗数

(Lagrange 乗数）として現れ、もはや状態方程式で決まる量ではなくなる。初期値に音波の成分がない場合（よく準備された初期値）は、Klainerman と Majda（1981）によって強い意味の収束が示された。音波の成分がある場合（よく準備されていない初期値）は、音波が非線型項を通じて $\mathbb{P}\boldsymbol{u}$ に影響を残さないことを示す必要がある。全空間では音波が遠方へ散って局所的に減衰すること、周期的な箱では速い振動どうしの共鳴が平均で打ち消されることを使って、極限が示されている。

物理の直観との対応

「流速が音速よりずっと遅ければ密度は一定とみなしてよい」という物理の直観は、この極限定理の強い意味の収束（よく準備された初期値の場合）に対応する。直観が外れるのは、音波の成分が大きい初期値（衝撃的な加圧）や、音波が境界で反射して共鳴する容器の中である。そこでは収束は弱い意味にとどまり、音波のエネルギーは極限の方程式から見えないまま残る。

例題 8.10　速い音波は弱極限で消えるがエネルギーは残る ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

周期 2π の区間 $x \in [0, 2\pi)$ で、1 次元の線型音響方程式

$$\partial_t \sigma + \frac{1}{\varepsilon}\partial_x u = 0, \qquad \partial_t u + \frac{1}{\varepsilon}\partial_x \sigma = 0$$

を初期値 $\sigma(0,x) = \cos x$、$u(0,x) = 0$ で考える。

1. $\sigma = \cos x \cos(t/\varepsilon)$、$u = \sin x \sin(t/\varepsilon)$ が解であることを確かめよ。
2. 音響エネルギー $E = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sigma^2 + u^2)\,\mathrm{d}x$ が時間によらないことを示し、その値を求めよ。
3. 時間 $t \in [0,1]$ と空間の滑らかな試験関数について、$\varepsilon \to 0$ で $\sigma \rightharpoonup 0$、$u \rightharpoonup 0$ だが、$\sigma^2 \rightharpoonup \frac{1}{2}\cos^2 x$ となることを示せ。弱極限 $(0,0)$ のエネルギーと比べよ。

解答. **(1)** $\partial_t \sigma = -\frac{1}{\varepsilon}\cos x \sin(t/\varepsilon)$、$\partial_x u = \cos x \sin(t/\varepsilon)$ なので第 1 式が成り立つ。$\partial_t u = \frac{1}{\varepsilon}\sin x \cos(t/\varepsilon)$、$\partial_x \sigma = -\sin x \cos(t/\varepsilon)$ なので第 2 式も成り立つ。初期値も合う。
(2) $\partial_t \frac{1}{2}(\sigma^2 + u^2) = \sigma\partial_t\sigma + u\partial_t u = -\frac{1}{\varepsilon}(\sigma\partial_x u + u\partial_x\sigma) = -\frac{1}{\varepsilon}\partial_x(\sigma u)$ で、周期境界なので積分すると 0。値は $t=0$ で $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$。具体的な解でも $\frac{1}{2}\big(\pi\cos^2(t/\varepsilon) + \pi\sin^2(t/\varepsilon)\big) = \frac{\pi}{2}$ となる。
(3) 試験関数 $\psi(t,x)$ との積分は $\int_0^1 \cos(t/\varepsilon)\Big(\int_0^{2\pi}\cos x\,\psi\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t$ で、括弧の中は t の滑らかな関数なので、本節の $\cos(t/\varepsilon) \rightharpoonup 0$ の議論から 0 に行く。u も同様である。一方 $\sigma^2 = \cos^2 x \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos(2t/\varepsilon))$ で、$\cos(2t/\varepsilon)$ の部分は弱極限で消えるから $\sigma^2 \rightharpoonup \frac{1}{2}\cos^2 x$、同様に $u^2 \rightharpoonup \frac{1}{2}\sin^2 x$。弱極限の $(\sigma, u) = (0,0)$ のエネルギーは 0 だが、$\sigma^2 + u^2$ の弱極限から計算したエネルギーは $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x\big)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ のまま残る。$\varepsilon = 0.01$ で $\int_0^1\int_0^{2\pi}\sigma^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \approx 1.564$（極限値 $\pi/2 \approx 1.571$）である（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。1 次元では速度場はすべて勾配の部分 $\mathbb{Q}u$ であり、発散 0 の部分 $\mathbb{P}u$ を持たないので、極限の非圧縮流は 0 になる。音波のエネルギーは極限の方程式から見えない形で残り、これが上の注意の「音波のエネルギーは極限の方程式から見えないまま残る」の具体例である。

8.10　例題：空間一様 BGK と Knudsen 数の見積もり

★★ 重要　H 定理を目で見る数値例と、流体近似が使える長さの見積もり

例題 8.11　空間一様 BGK の緩和と H の減少　★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

空間的に一様な BGK 方程式 $\partial_t f = (M_f - f)/\tau$ を考える。

1. M_f は時間によらないことを示し、解を $f(t) = M + (f_0 - M)\mathrm{e}^{-t/\tau}$（$M = M_{f_0}$）と求めよ。
2. $H(t) = \int f \ln f \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ が単調に減少することを、H の凸性から示せ。
3. 長時間で $H(t) - H(M)$ が $\mathrm{e}^{-2t/\tau}$ に比例して減ることを示せ。

解答. **(1)** $\int (M_f - f)\phi = 0$（$\phi = 1, \boldsymbol{v}, |\boldsymbol{v}|^2$）なので、$f$ の $n, \boldsymbol{u}, T$ は時間によらず、$M_f = M$ は定数である。すると方程式は $\partial_t (f - M) = -(f - M)/\tau$ という線型の常微分方程式になり、$f - M = (f_0 - M)\mathrm{e}^{-t/\tau}$。
(2) $\theta = \mathrm{e}^{-t/\tau} \in (0, 1]$ と置くと $f = \theta f_0 + (1-\theta)M$。$\Phi(\theta) = H(\theta f_0 + (1-\theta)M)$ は、$s \mapsto s \ln s$ が凸なので θ について凸である。f_0 と M は同じモーメントを持つので、例題 8.3 から $\Phi(\theta) \geq \Phi(0)$。凸関数が $\theta = 0$ で最小値を取るので Φ は $[0, 1]$ で非減少であり、θ は t について減少するから $H(t)$ は t について非増加である（$f_0 \neq M$ なら狭義凸性から狭義減少）。
(3) $f = M(1 + \theta h)$、$h = (f_0 - M)/M$ と書く。$\int Mh\phi = 0$（$\phi = 1, \boldsymbol{v}, |\boldsymbol{v}|^2$）であり、$\ln M$ はこれらの線型結合なので

$$H(t) - H(M) = \int M(1+\theta h)\ln(1+\theta h)\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int M\Big(\theta h + \frac{\theta^2 h^2}{2} + \mathcal{O}(\theta^3)\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$
$$= \frac{\theta^2}{2}\int Mh^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \mathcal{O}(\theta^3).$$

1 次の項は $\int Mh = 0$ で消える。$\theta^2 = \mathrm{e}^{-2t/\tau}$ なので、H は分布そのもの（$\mathrm{e}^{-t/\tau}$）の 2 倍の速さで平衡値へ近づく。
図 8.2 は、1 次元速度で、± 2 を中心とする幅 0.5 の 2 つの Gauss 分布を重ねた初期値（温度は $0.5^2 + 2^2 = 4.25$）の緩和である。数値解（Runge–Kutta 法）が厳密解と一致し、H が単調に減り、$t = \tau$ から 2τ で $H - H(M)$ がおよそ e^2 分の 1 になることを確かめた（検算 `scripts/verify_ch08.py`、データ `scripts/gen_ch08.py`）。

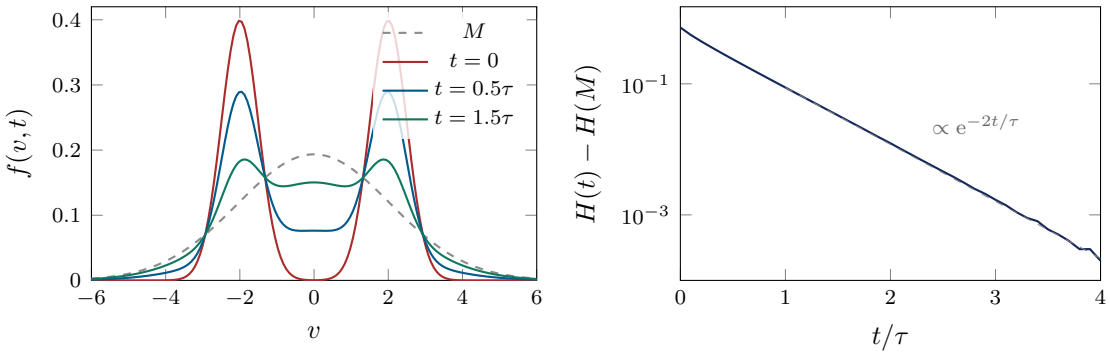


図 8.2　空間一様 BGK 方程式の緩和。左：速度分布が双峰の初期値から Maxwell 分布へ近づく。右：$H(t) - H(M)$（対数目盛）。単調に減少し、長時間では $\mathrm{e}^{-2t/\tau}$（破線）に従う。

例題 8.12　空気の Knudsen 数と流体近似の適用範囲 ★★ 重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

空気を、20 °C、1 気圧（101325 Pa）、有効直径 $d = 0.37\,\mathrm{nm}$、分子量 28.97 の剛体球気体とみなす。平均自由行程は $\lambda = 1/(\sqrt{2}\, n \pi d^2)$ である（$\sqrt{2}$ は Maxwell 分布での平均相対速さが平均の速さの $\sqrt{2}$ 倍であることに由来する）。

1. 数密度 n と平均自由行程 λ を求めよ。
2. 管の径 $L = 1\,\mathrm{mm}$ と $L = 1\,\mu\mathrm{m}$ での Knudsen 数を求めよ。
3. 同じ温度で圧力を $1\,\mathrm{Pa}$ に下げた真空容器では λ はいくらか。
4. 目安として、$\mathrm{Kn} < 0.01$ なら Navier–Stokes 方程式、$0.01 < \mathrm{Kn} < 0.1$ なら壁での滑りの境界条件を付けた Navier–Stokes 方程式、それより大きければ Boltzmann 方程式に基づく扱いが要るとされる。(2)(3) の状況はそれぞれどれに当たるか。

解答. **(1)** $n = p/(k_{\mathrm{B}}T) = 101325/(1.381 \times 10^{-23} \times 293.15) \approx 2.50 \times 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$。$\pi d^2 = \pi \times (0.37 \times 10^{-9})^2 \approx 4.30 \times 10^{-19}\,\mathrm{m}^2$ なので

$$\lambda = \frac{1}{1.414 \times 2.50 \times 10^{25} \times 4.30 \times 10^{-19}} \approx 6.6 \times 10^{-8}\,\mathrm{m} = 66\,\mathrm{nm}.$$

粘性率の実測値 $\mu = 1.81 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}$ から $\lambda = (\mu/p)\sqrt{\pi k_{\mathrm{B}} T/(2m)}$ で逆算しても約 65 nm となり、同じ桁である（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。分子の平均の速さは $\bar{c} = \sqrt{8 k_{\mathrm{B}} T/(\pi m)} \approx 463\,\mathrm{m/s}$ なので、平均自由時間は $\lambda/\bar{c} \approx 0.14\,\mathrm{ns}$ である。
(2) $L = 1\,\mathrm{mm}$ で $\mathrm{Kn} \approx 6.6 \times 10^{-5}$、$L = 1\,\mu\mathrm{m}$ で $\mathrm{Kn} \approx 0.066$。
(3) $\lambda \propto 1/n \propto 1/p$ なので $\lambda \approx 66\,\mathrm{nm} \times 101325 \approx 6.7\,\mathrm{mm}$。
(4) 1 mm の管の大気圧の流れは Navier–Stokes 方程式の範囲に十分入る。1 μ m の流路（微小機械の内部など）は滑りの境界条件が要る領域に入る。1 Pa の真空容器では、径が数 cm の容器でも $\mathrm{Kn} \sim 0.1$ 以上になり、流体方程式でなく Boltzmann 方程式（あるいは粒子法）で扱う必要がある。地上の日常の流れで流体近似が非常によく成り立つのは、λ が $0.1\,\mu\mathrm{m}$ 程度と極めて短いからである。

8.11 この章のまとめ

★★★ 最重要 流体近似の階層と、各段の正当化の現状

段	小パラメータ	得る方程式	証明の状況	破綻する場面
粒子 → 運動論	$d \to 0$、Nd^2 一定	Boltzmann 方程式	短時間（Lanford）。長時間は 2025 年のプレプリントが主張	高密度気体・液体（3 体衝突・再衝突）
運動論 → 非粘性流体	$\mathrm{Kn} \to 0$	圧縮性 Euler	Euler の滑らかな解の存在時間内で証明済み	衝撃波の発生後
運動論 → 粘性流体	Kn の 1 次	圧縮性 NS–Fourier	漸近展開としての整合性（極限定理ではない）	衝撃波の内部（厚さが数 λ）、壁近傍の Knudsen 層、希薄気体
運動論 → 非圧縮流体	$\mathrm{Ma} \sim \mathrm{Kn} \to 0$	非圧縮 NS–Fourier	弱解として時間大域的に証明済み（Golse–Saint-Raymond）	極限の解の一意性・滑らかさが不明
圧縮 → 非圧縮	$\mathrm{Ma} \to 0$	非圧縮 Euler/NS	よく準備された初期値で強収束（Klainerman–Majda）、一般には弱収束	強い音波・音響共鳴
NS 自体	なし	—	2 次元は大域的に適切。3 次元の大域的な滑らかさは未解決	有限時間爆発があるかどうか不明

表 8.2　流体近似の階層。「破綻する場面」は、その段の小パラメータが小さくなくなる状況である。

第 8 章の要点

- 流体の保存則（質量・運動量・エネルギー）は、衝突不変量が $1, \boldsymbol{v}, |\boldsymbol{v}|^2$ に限ること（定理 8.3）から無条件に出る。近似が入るのは応力と熱流束の構成則だけである。
- H 定理によって、衝突の零点は Maxwell 分布に限られる。$\mathrm{Kn} \to 0$ の最低次で分布が局所 Maxwell 分布になるのはこのためで、その 5 個の場の方程式（Euler 方程式）は次の次数の可解条件（Fredholm の二者択一、$\operatorname{Ran}\mathcal{L} = (\operatorname{Ker}\mathcal{L})^{\perp}$）として出る。
- Chapman–Enskog 展開の 1 次で粘性と熱伝導が出る。BGK 模型では $\mu = p\tau$、$\kappa = \frac{5}{2}\frac{k_{\mathrm{B}}}{m}p\tau$、$\mathrm{Pr} = 1$（実際は約 2/3。BGK が C 型のモデルであることの表れ）。
- 非圧縮 Navier–Stokes 方程式を極限定理として得るには $\mathrm{Ma} \sim \mathrm{Kn} \to 0$ の拡散スケーリングを取る。これは弱解として証明されている。
- Boltzmann 方程式自体の導出（Lanford）は短時間に限られ、到達した Navier–Stokes 方程式の 3 次元の大域的な滑らかさは未解決である。正当化の連鎖は両端に弱い環を持つ。

第 1 章の分類に照らすと、この章で扱った近似はおおむね B 型（極限）である。Boltzmann–Grad 極限は分子的混沌という「閉じる」操作を、Lanford の定理によって B 型の極限定理へ格上げした（ただし短時間）。$\mathrm{Kn} \to 0$ の Hilbert 展開と非圧縮スケーリングの極限定理は、局所平衡の仮定と Navier–Stokes の構成則を、小さい Knudsen 数での極限と漸近展開として正当化した。圧縮性 Navier–Stokes 方程式は極限そのものでなく 1 次の補正を含む漸近的な方程式であり、Mach 数 $\to 0$ の極限は弱収束による B 型の極限である。一方、BGK 模型は衝突演算子の C 型の置き換えであり、保存則と H 定理という構造は保つが、Prandtl 数という定量的な比で外れた。C 型の近似が構造を保つことと定量的に正しいことは別であるという点は、第 9 章の乱流モデルと交換相関汎関数でも繰り返し現れる。

総合問題　2 速度の運動論模型から拡散方程式へ ★★★ 最重要

［オリジナル］既存問題に基づかない Claude 作成

1 次元の粒子が速さ c で右か左にだけ動き、時間あたり $1/(2\tau)$ の割合で向きを反転するとする。右向き・左向きの粒子の分布を $f_\pm(t,x)$ とすると

$$\partial_t f_+ + c\,\partial_x f_+ = \frac{f_- - f_+}{2\tau}, \qquad \partial_t f_- - c\,\partial_x f_- = \frac{f_+ - f_-}{2\tau}$$

である（Goldstein–Kac の模型）。密度を $\rho = f_+ + f_-$、流束を $j = c(f_+ - f_-)$ とし、x は周期的とする。右辺が衝突演算子の役をする。

(1) 衝突不変量が 1（粒子数）だけであることを確かめ、$\partial_t\rho + \partial_x j = 0$ を導け。さらに $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int (f_+^2 + f_-^2)\,\mathrm{d}x \le 0$ を示し、等号が成り立つ分布（衝突の零点）を求めよ。（使う道具：本章の Boltzmann 方程式の節の衝突不変量と H 定理）

(2) j の方程式 $\partial_t j + c^2\partial_x\rho = -j/\tau$ を導け。この模型でモーメント方程式が 2 本で閉じる理由と、本章の保存則の節でモーメント方程式が閉じなかった理由を比べよ。（使う道具：本章の保存則とモーメント方程式の節、第 6 章の BBGKY 階層）

(3) Chapman–Enskog 展開の 1 次として $j \approx -c^2\tau\,\partial_x\rho$ を導き、ρ が拡散方程式 $\partial_t\rho = D\partial_x^2\rho$ に従うことを示せ。D を求めよ。（使う道具：本章の Chapman–Enskog 展開の節、第 7 章の多重尺度法）

(4) $\rho, j \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx + st}$ を代入して分散関係 $\tau s^2 + s + c^2\tau k^2 = 0$ を導け。$a = (ck\tau)^2$ と置き、遅い枝 $s\tau$ を a で展開して、1 次の項が (3) の拡散に一致することを確かめよ。$ck\tau = 0.1$ と $ck\tau = \frac{1}{2}$ で、厳密な s と 1 次の近似を比べよ。（使う道具：本章の次の次数と展開の限界、第 1 章の漸近展開）

(5) 速い枝 $s \approx -1/\tau$ は何を表すか。この模型の近似を第 1 章の A・B・C 型の分類に照らして整理せよ。（使う道具：第 1 章の分類、第 7 章の特異摂動と境界層）

解答. **(1)** 二つの式を足すと右辺は打ち消し合い、$\partial_t(f_+ + f_-) + c\,\partial_x(f_+ - f_-) = 0$、すなわち $\partial_t\rho + \partial_x j = 0$。$\phi(\pm)$ を向きの関数として $\phi(+)\frac{f_- - f_+}{2\tau} + \phi(-)\frac{f_+ - f_-}{2\tau} = \frac{(\phi(+) - \phi(-))(f_- - f_+)}{2\tau}$ がすべての $f_\pm$ で 0 になるのは $\phi(+) = \phi(-)$、すなわち定数のときに限る。衝突不変量は粒子数だけで、運動量 $c(\pm 1)$ は保存しない（向きの反転は運動量を変える）。
次に、第 1 式に f_+、第 2 式に f_- を掛けて足し、x で積分すると、輸送の項は $\frac{c}{2}\partial_x(f_+^2 - f_-^2)$ の積分で周期境界により 0 になり、

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int (f_+^2 + f_-^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\tau}\int \big(f_+(f_- - f_+) + f_-(f_+ - f_-)\big)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\tau}\int (f_+ - f_-)^2\,\mathrm{d}x \le 0.$$

等号は $f_+ = f_-$、すなわち $j = 0$ のときに限る。衝突の零点は「右向きと左向きが同数」の分布で、Maxwell 分布の役をする。$\int(f_+^2 + f_-^2)$ は H の 2 次近似に当たる量である（数値で単調減少と質量保存を確かめた。検算 `scripts/verify_ch08.py`）。
(2) 第 1 式から第 2 式を引いて c を掛けると $\partial_t j + c^2\partial_x\rho = \frac{c}{2\tau}\cdot 2(f_- - f_+) = -j/\tau$。速度が $\pm c$ の 2 値しかないので $v^2 = c^2$ が定数であり、流束の流束 $\int v^2 f$ が $c^2\rho$ と既知の量で書ける。そのためモーメントの連鎖が 2 段で閉じる。連続な速度を持つ気体では $\int v^2 f$ が新しい未知量（応力）になり、その流束にはさらに高次のモーメントが現れて、第 6 章の BBGKY 階層と同じく連鎖が終わらない。ここでは閉じる代わりに、j が保存量でないことが新しい要素になる。
(3) j の方程式を $j = -\tau(\partial_t j + c^2\partial_x\rho)$ と書く。長さ L の変化を見ると $\partial_x \sim 1/L$ で、ρ は拡散の時間 $L^2/(c^2\tau)$ で変化する。小さいパラメータ $\mathrm{Kn} = c\tau/L$ について、最低次では $j = 0$（局所平衡）、1 次では右辺の $\partial_t j$ は j 自体が $\mathcal{O}(\mathrm{Kn})$ でさらに時間微分が遅いので 1 段高次になり、

$$j \approx -c^2\tau\,\partial_x\rho.$$

これを保存則に入れると $\partial_t \rho = c^2 \tau\, \partial_x^2 \rho$、すなわち $D = c^2\tau$。粘性率 $\mu = p\tau$ が緩和時間と速さの 2 乗の積で決まったのと同じ構造で、構成則（Fick の法則）が Kn の 1 次として出る。衝突不変量が粒子数だけなので、流体の場は ρ 1 個であり、Euler 方程式に当たる 0 次の方程式は $\partial_t \rho = 0$（流束 0）となる。拡散が見えるのは時間を Kn^{-1} 倍に引き延ばしたとき、すなわち本章の拡散スケーリングと同じ時間尺度である。

(4) $s\rho = -\mathrm{i}kj$、$(s + 1/\tau) j = -\mathrm{i}kc^2\rho$ を掛け合わせて $s(s + 1/\tau) = -c^2k^2$、両辺に τ を掛けて $\tau s^2 + s + c^2\tau k^2 = 0$。解は

$$s\tau = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}, \qquad a = (ck\tau)^2 .$$

遅い枝（$+$ の符号）を展開すると

$$s\tau = -(a + a^2 + 2a^3 + 5a^4 + 14a^5 + \cdots)$$

で、係数は Catalan 数である。1 次の項 $s = -a/\tau = -c^2\tau k^2 = -Dk^2$ は (3) の拡散方程式の減衰率そのもので、2 次の $-a^2/\tau = -\tau D^2 k^4$ は Burnett 方程式に当たる補正である。$ck\tau = 0.1$（$a = 0.01$）では厳密値 $s\tau = -0.0101021$ に対し 1 次は -0.01 で、相対誤差は約 1.0%、2 次まで取ると約 2×10^{-4} に下がる。$ck\tau = \frac{1}{2}$（$a = \frac{1}{4}$）では厳密値 $s\tau = -\frac{1}{2}$ に対し 1 次は $-\frac{1}{4}$ で、2 倍もずれる。展開の係数の比は 4 に近づくので、級数は $|a| < \frac{1}{4}$ でしか収束せず、$ck\tau > \frac{1}{2}$ では s が複素数になって遅い枝と速い枝が合流する。波長が平均自由行程（$c\tau$）の数倍より短い擾乱には、拡散という記述そのものが当てはまらない（検算 `scripts/verify_ch08.py`）。

(5) 速い枝は $s\tau = -1 + a + a^2 + \cdots$ で、$s \approx -1/\tau$ は流束 j が局所平衡 $j = -c^2\tau \partial_x \rho$ へ時間 τ で緩和する過程を表す。初期値が局所平衡になっていなければ、最初の $\mathcal{O}(\tau)$ の時間に初期層ができ、その後は遅い枝だけが残る。第 7 章の特異摂動で、小さい係数が最も速い項に付いた方程式に境界層ができたのと同じ構造である。分類に照らすと、向きの反転を一定の割合で起こすという衝突の模型そのものは、BGK と同じく C 型（衝突を単純な形で閉じる）の置き換えである。そこから拡散方程式を得る段は $\mathrm{Kn} \to 0$ の B 型（極限）の近似で、拡散スケーリングの下では極限定理の形になる。2 次以降の補正は漸近展開の高次項として意味を持つが、収束半径 $a = \frac{1}{4}$ の外では無力であり、本章で圧縮性 Navier–Stokes 方程式を「1 次の補正まで含めた方程式」と位置づけたのと同じ事情がこの模型でも成り立っている。